

**Логвенков С.А., Мышкис П.А. Самовол В.С.**

**СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ.**

**Учебное пособие для факультетов менеджмента, политологии и  
социологии.**

**Государственный университет – Высшая школа экономики  
Кафедра высшей математики**

## **Введение**

Настоящий сборник задач посвящен одному из главных разделов высшей математики - линейной алгебре, а также включает в себя задачи по аналитической геометрии. Он составлен в соответствии с программами курса «Алгебра и анализ», читаемого на различных факультетах ГУ-ВШЭ. Изложение материала в предлагаемом сборнике ориентировано на углубленное изучение фундаментальных математических идей и методов, широко применяемых в исследовании социально-экономических процессов и явлений. При этом основное внимание уделено таким объектам, как векторы, матрицы и системы линейных уравнений. Большая часть задач снабжена ответами.

При подборе примеров и задач привлекались разнообразные источники и, прежде всего, те книги, которые вошли в приведенный в конце сборника библиографический список.

## 1. Векторы

1.1. Даны точки  $M_1(4; -2; 6)$ ,  $M_2(1; 4; 0)$ . Найдите длину вектора  $\overrightarrow{M_1M_2}$ .

1.2. Известно, что  $\overrightarrow{AB} = (4; -12; z)$ , причем  $|\overrightarrow{AB}| = 13$ . Найдите  $z$ .

1.3. Вектор  $\vec{a}$  составляет с осями  $Ox$  и  $Oy$  углы  $60^\circ$  и  $120^\circ$ . Найдите его координаты и сделайте рисунок, если  $|\vec{a}| = 2$ .

1.4. Найдите вектор  $\vec{a}$ , образующий с тремя базисными векторами  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{k}$  равные острые углы, при условии, что  $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$ .

1.5. Даны три вершины параллелограмма  $ABCD$ :  $A(3; -4; 7)$ ,  $B(-5; 3; -2)$ ,  $C(1; 2; -3)$ . Найдите его четвертую вершину  $D$ .

1.6. Даны вершины треугольника  $A(3; -1; 5)$ ,  $B(4; 2; -5)$ ,  $C(-4; 0; 3)$ . Найдите длину медианы, проведенной из вершины  $A$ .

1.7. Постройте параллелограмм на векторах  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$  и  $\vec{b} = \vec{k} - 3\vec{j}$ . Определите длины его диагоналей.

1.8. Найдите длину вектора  $\vec{a}$ , если векторы  $\vec{a} = m\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$  и  $\vec{b} = 4\vec{i} + 6\vec{j} - n\vec{k}$  коллинеарны.

1.9. Определите длины сторон параллелограмма, диагоналями которого служат векторы  $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  и  $\vec{d} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ .

**1.10.** Даны векторы  $\vec{a}(4; -2; 4)$  и  $\vec{b}(6; -3; 2)$ . Найдите а)  $(\vec{a} + \vec{b})^2$ , б)  $(\vec{a} - \vec{b})^2$ , в)  $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$ .

**1.11.** Вычислить а)  $(\vec{m} + \vec{n})^2$ , если  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  - единичные векторы с углом между ними  $30^\circ$ ; б)  $(\vec{a} - \vec{b})^2$ , если  $|\vec{a}| = \sqrt{8}$ ,  $|\vec{b}| = 4$  и угол между ними составляет  $135^\circ$ .

**1.12.** Даны длины векторов  $|\vec{a}| = 13$ ,  $|\vec{b}| = 19$ ,  $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$ . Найдите  $|\vec{a} - \vec{b}|$ .

**1.13.** Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  образуют угол  $\varphi = 60^\circ$ , причем  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 8$ . Определите  $|\vec{a} + \vec{b}|$  и  $|\vec{a} - \vec{b}|$ .

**1.14.** Найдите угол между диагоналями параллелограмма, если заданы три его вершины  $A(2; 1; 3)$ ,  $B(5; 2; -1)$ ,  $C(-3; 3; -3)$ .

**1.15.** Даны векторы  $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$  и  $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$ , где  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  - единичные векторы, образующие угол  $120^\circ$ . Найдите угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

**1.16.** Найти угол между биссектрисами углов  $xOy$  и  $yOz$ .

**1.17.** Найдите длину проекции вектора  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$  на вектор  $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ .

**1.18.** Даны два вектора  $\vec{a}(m; 3; 4)$  и  $\vec{b}(4; m; -7)$ . При каких  $m$   $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  будут перпендикулярны?

**1.19.** При каком значении параметра  $m$  векторы  $\vec{a} = m\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$  и  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - m\vec{k}$  перпендикулярны.

**1.20.** При каком значении параметра  $m$  угол между векторами  $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{k}$  и  $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{k}$  равен  $180^\circ$ ?

**1.21.** Разложите вектор  $\vec{x}(4, 3, -2)$  по векторам  $\vec{e}_1(1, 1, 2)$ ,  $\vec{e}_2(-3, 0, -2)$ ,  $\vec{e}_3(1, 2, -1)$ .

**1.22.** Найдите координаты вектора  $\vec{x}(2, 2, -1)$  в базисе  $\vec{e}_1(1, 0, 2)$ ,  $\vec{e}_2(-1, 2, 1)$ ,  $\vec{e}_3(-1, 4, 0)$ .

**1.23.** Разложите вектор  $\vec{x}(2; 2; 3; 3)$  по системе векторов  $\vec{a}(1; 2; 3; 1)$ ,  $\vec{b}(2; 1; 2; 3)$ ,  $\vec{c}(3; 2; 4; 4)$ .

**1.24.** Разложите вектор  $\vec{x}(4; 1; 3; 1)$  по системе векторов  $\vec{a}(2; 0; 1; 1)$ ,  $\vec{b}(1; 1; 2; -2)$ ,  $\vec{c}(2; 1; 3; -3)$ .

**1.25.** В линейном пространстве многочленов степени, не превосходящей 2, найдите разложение многочлена  $T(x) = 3x^2 + 2x + 1$  по базису  $P(x) = 4x^2 + 3x + 4$ ,  $Q(x) = 3x^2 + 2x + 3$ ,  $R(x) = x^2 + x + 2$ . В ответе укажите координаты многочлена  $T(x)$  в данном базисе.

**1.26.** В линейном пространстве многочленов степени, не превосходящей 2, найдите разложение многочлена  $T(x) = 9x^2 + 10x + 4$  по базису  $P(x) = 3x^2 + 2x + 3$ ,  $Q(x) = x^2 + x + 1$ ,  $R(x) = 3x^2 + 3x + 2$ . В ответе укажите координаты многочлена  $T(x)$  в данном базисе.

## 2. Элементы аналитической геометрии.

- 2.1.** Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(2; -4; -2)$  перпендикулярно вектору  $\overline{M_1M_2}$ , где  $M_1(-1; -3; -7)$  и  $M_2(-4; -1; -5)$ .
- 2.2.** Напишите уравнение плоскости, параллельной оси  $Ox$  и проходящей через точки  $M_1(0; 1; 3)$  и  $M_2(2; 4; 5)$ .
- 2.3.** Напишите уравнение плоскости, параллельной оси  $Oz$  и проходящей через точки  $M_1(3; 1; 0)$  и  $M_2(1; 3; 0)$ .
- 2.4.** Напишите уравнение плоскости, проходящей через ось  $Oz$  и точку  $M(2; -4; 3)$ .
- 2.5.** Напишите уравнение плоскости, проходящей через ось  $Ox$  и точку  $M(0; 5; 6)$ .
- 2.6.** Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(5; 4; 3)$  и отсекающей равные отрезки на осях координат.
- 2.7.** Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(2; -3; 3)$  и отсекающей на осях  $Oy$  и  $Oz$  вдвое большие отрезки, чем на оси  $Ox$ .
- 2.8.** Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(2; 3; -1)$  параллельно плоскости  $5x - 3y + 2z - 10 = 0$ .
- 2.9.** Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(14; 2; 2)$  параллельно плоскости  $x - 2y - 3z = 0$ .

**2.10.** Найдите угол между плоскостью  $x + 2y - 2z - 8 = 0$  и  $x + y - 17 = 0$ .

**2.11.** Найдите угол между плоскостью  $x - y + z\sqrt{2} - 6 = 0$  и  $x + y - z\sqrt{2} + 12 = 0$ .

**2.12.** Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(-1; -1; 2)$  перпендикулярно плоскостям  $x - 2y + z - 13 = 0$ ,  $x + 2y - 2z + 2 = 0$ .

**2.13.** Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(3; -1; -5)$  перпендикулярно плоскостям  $3x - 2y + 2z - 6 = 0$ ,  $5x - 4y + 3z + 3 = 0$ .

**2.14.** Напишите уравнение прямой (в каноническом параметрическом виде), проходящей через точки  $M_1(-1; 2; 3)$  и  $M_2(2; 6; -2)$ .

**2.15.** Напишите в каноническом и параметрическом виде уравнение прямой, являющейся пересечением плоскостей  $x + y - z - 2 = 0$  и  $2x - y + z - 7 = 0$ .

**2.16.** Прямые  $l_1$  и  $l_2$  являются линиями пересечения двух пар плоскостей

$l_1: \begin{cases} 2x + y - z - 2 = 0 \\ x - y + 2z - 2 = 0 \end{cases}; \quad l_2: \begin{cases} x + 3y - z - 2 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$ . Определите,

пересекаются ли эти прямые.

**2.17.** Напишите уравнение перпендикуляра, опущенного из точки  $M(3; -5; 2)$  на ось  $Ox$ .

**2.18.** Найдите угол между прямой  $\frac{x+1}{0} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{1}$  и прямой  $x=2t-1, y=2t+3, z=2$ .

**2.19.** Найдите угол между прямой  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{\sqrt{2}}$  и плоскостью  $x+y+z\sqrt{2}=0$ .

**2.20.** При каком значении параметра  $a$  прямая  $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1}$  и плоскость  $2x+(a+2)y-2z+11=0$  перпендикулярны?

**2.21.** При каком значении параметра  $a$  прямая  $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{8} = \frac{z}{6}$  и плоскость  $x+(a+1)y+3z+5=0$  перпендикулярны?

**2.22.** Найдите точку пересечения прямой  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}$  и плоскости  $x-3y+z-8=0$ .

**2.23.** Найдите точку пересечения прямой  $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{0}$  и плоскости  $3x+y-2z=0$ .

**2.24.** Найдите точку пересечения прямой, проходящей через точки  $(1, 1, 1)$  и  $(1, 2, 3)$  и плоскости  $x-y-3z-11=0$ .

**2.25** При каком значении параметра  $a$  плоскость  $x+y+az-4=0$  и прямая  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$  пересекаются (параллельны)?

**2.26.** Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(2;3;-4)$  и перпендикулярной прямой  $\frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ .

**2.27.** Напишите уравнение плоскости, проходящей через прямую  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$  и точку  $M(3;4;5)$ .

**2.28.** Найдите координаты проекции точки  $P(-1, 2, 0)$  на плоскость  $4x - 5y - z - 7 = 0$ .

**2.29.** Найдите координаты проекции точки  $P(2, -1, 1)$  на плоскость  $x - y + 2z - 2 = 0$ .

**2.30.** Найдите расстояние от точки  $(0, 5, 5)$  до плоскости  $5x + 2y - z - 10 = 0$ .

**2.31.** Найдите проекцию точки  $M(2;3;4)$  на прямую  $x = y = z$ .

**2.32.** Найдите проекцию точки  $P(0; 2; 1)$  на прямую  $\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$ .

**2.33.** Напишите уравнение перпендикуляра, опущенного из точки  $M(1;0;-1)$  на прямую  $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-3}$ .

**2.34.** Найдите точку пересечения прямых  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$  и  $\frac{x+6}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{2}$ .

**2.35.** Найдите точку пересечения прямых  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{3}$  и

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-2}{1}.$$

**2.36.** Напишите уравнение плоскости, относительно которой точки  $P_1(1; -2; -3)$  и  $P_2(3; 4; 9)$  симметричны.

**2.37.** Напишите уравнение плоскости, относительно которой точки  $P_1(-2; 1; -3)$  и  $P_2(6; 5; 5)$  симметричны.

**2.38.** Найдите точку, симметричную точке  $P(0, -1, 3)$  относительно плоскости  $2x + y - 2z - 2 = 0$ .

**2.39.** Найдите точку, симметричную точке  $P(2, 1, -1)$  относительно плоскости  $2x - y + z - 8 = 0$ .

### 3. Матрицы

3.1. Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ -3 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ . Найдите

матрицу  $C = 2A - 3B$ .

3.2. Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 1 \\ -5 & 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 9 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 1 \\ -3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ . Найдите

матрицу  $C = A - 2B$ .

3.3. Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 6 & -2 & 4 \\ 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ . Найдите

матрицу  $X$ , удовлетворяющую матричному уравнению  $A + 2X - 4B = 0$ .

3.4. Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ . Найдите

матрицу  $X$ , удовлетворяющую матричному уравнению  $5A + 3X - B = 0$ .

3.5. Найдите  $f(A)$ , если  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  и  $f(x) = x^2 - 3x$ .

3.6. Найдите произведение матриц  $A$  и  $B$

а)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{д) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{е) } A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ж) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{з) } A = (1 \ 2 \ -3), B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{и) } A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, B = (1 \ 2 \ -3)$$

$$\text{к) } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{л) } A = (1 \ 2 \ -5), B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{м) } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

**3.7.** Возведите матрицу  $A$  в степень  $n$

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad n = 3$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad n = 5$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad n = 10, \quad n = 15$$

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n = 10$$

$$\text{д) } A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad n - \text{ произвольное натуральное число}$$

**3.8.** Найдите ранг матрицы

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 & 7 \\ 4 & 15 & 8 & 7 & 1 \\ 2 & 17 & 4 & 13 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{д) } \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{е) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 4 & 11 & -7 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ж) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{з) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & -9 & 4 & -2 \\ 5 & 18 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{и) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{к) } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

**3.9.** Исследуйте систему векторов на линейную зависимость или независимость

а)  $\vec{a}_1 = (-7; 5; 19)$ ,  $\vec{a}_2 = (-5; 7; -7)$ ,  $\vec{a}_3 = (-8; 7; 14)$

б)  $\vec{a}_1 = (1; 2; -2)$ ,  $\vec{a}_2 = (0; -1; 4)$ ,  $\vec{a}_3 = (2; -3; 3)$

в)  $\vec{a}_1 = (1; 8; -1)$ ,  $\vec{a}_2 = (-2; 3; 3)$ ,  $\vec{a}_3 = (4; -11; 9)$

г)  $\vec{a}_1 = (1; 2; 3)$ ,  $\vec{a}_2 = (2; -1; 1)$ ,  $\vec{a}_3 = (1; 3; 4)$

$$\text{д) } \vec{a}_1 = (0; 1; 1; 0), \vec{a}_2 = (1; 1; 3; 1), \vec{a}_3 = (1; 3; 5; 1), \vec{a}_4 = (0; 1; 1; -2)$$

$$\text{е) } \vec{a}_1 = (-1; 7; 1; -2), \vec{a}_2 = (2; 3; 2; 1), \vec{a}_3 = (4; 4; 4; -3), \\ \vec{a}_4 = (1; 6; -1; 1)$$

**3.10.** Найдите ранг системы векторов и укажите какой-нибудь базис в этой системе векторов

$$\text{а) } \vec{a}_1 = (1; 1; 2), \vec{a}_2 = (3; 1; 2), \vec{a}_3 = (1; 2; 1), \vec{a}_4 = (2; 1; 2)$$

$$\text{б) } \vec{a}_1 = (1; 1; 1), \vec{a}_2 = (-3; -5; 5), \vec{a}_3 = (3; 4; -1), \vec{a}_4 = (1; -1; 4)$$

$$\text{в) } \vec{a}_1 = (1; 1; 0; -1), \vec{a}_2 = (1; 2; 1; 0), \vec{a}_3 = (1; 3; 2; 1), \vec{a}_4 = (1; 4; 3; 2)$$

$$\text{г) } \vec{a}_1 = (1; 0; 1; 0), \vec{a}_2 = (-2; 1; 3; -7), \vec{a}_3 = (3; -1; 0; 3), \\ \vec{a}_4 = (-4; 1; -3; 1)$$

**3.11.** В линейном пространстве симметричных матриц  $2 \times 2$  найдите

координаты элемента  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  в базисе  $e_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,

$$e_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**3.12.** В линейном пространстве симметричных матриц  $2 \times 2$  найдите

координаты элемента  $A = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$  в базисе  $e_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

**3.13.** Вычислите определитель

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 12 & 19 \\ 3 & 9 & 17 \end{vmatrix}$$

$$\text{д) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\text{е) } \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

**3.14.** Вычислите определитель матрицы путем разложения его по элементам второй строки

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ x & y & z & t \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

**3.15.** Вычислите определитель матрицы путем разложения его по элементам третьего столбца

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 5 & 1 & x & 8 \\ -4 & -1 & y & -5 \\ 8 & -1 & z & 12 \\ 4 & -1 & t & 7 \end{vmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & a & -1 \\ -1 & -2 & b & -1 \\ -2 & 0 & c & 1 \\ 0 & 1 & d & 0 \end{vmatrix}$$

**3.16.** Вычислите определитель

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -5 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 8 & 0 \\ -2 & -5 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & -2 & 3 \\ 1 & 6 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{д)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 7 \\ -2 & -5 & 7 & 5 \\ -2 & -5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{е)} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{ж)} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 7 \\ -2 & -8 & -7 & -3 \\ -1 & -6 & -5 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\text{з)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

**3.17.** При каких значениях параметра  $a$  система векторов  $\vec{x}_1 = (3; 7; 4)$ ,  $\vec{x}_2 = (3; 8; 6)$ ,  $\vec{x}_3 = (3; a + 5; 8)$  линейно зависима.

**3.18.** При каких значениях параметра  $a$  система векторов  $\vec{x}_1 = (1; 2; 6)$ ,  $\vec{x}_2 = (a - 4; -2; -2)$ ,  $\vec{x}_3 = (3; 1; 1)$  линейно зависима.

**3.19.** При каких значениях параметра  $a$  произвольный вектор в пространстве  $\mathbf{R}^3$  можно разложить по векторам  $\vec{a}_1 = (1, 4, 3)$ ,  $\vec{a}_2 = (2, 1 - a, 1)$ ,  $\vec{a}_3 = (5, 4, 1)$ ?

**3.20.** При каких значениях параметра  $a$  произвольный вектор в пространстве  $\mathbf{R}^3$  можно разложить по векторам  $\vec{a}_1 = (-3, 1, 4)$ ,  $\vec{a}_2 = (a + 2, -2, -5)$ ,  $\vec{a}_3 = (5, 1, 9)$ ?

**3.21.** При каком значении параметра  $a$  точки  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(2; 1; 0)$ ,  $C(-1; 0; 1)$  и  $D(a + 1; 2; 0)$  лежат в одной плоскости? (Исследуйте линейную зависимость или независимость векторов  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{AD}$ )

**3.22.** При каком значении параметра  $a$  точки  $A(0; 3; 1)$ ,  $B(2; 8; 9)$ ,  $C(1; 0; 2a - 2)$  и  $D(0; 8; 11)$  лежат в одной плоскости? (Исследуйте линейную зависимость или независимость векторов  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{AD}$ )

**3.23.** Найдите матрицу, обратную матрице  $A$

а)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$

б)  $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

в)  $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\text{д) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{е) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{ж) } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{з) } A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{и) } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{к) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**3.24.** Найдите значения параметров  $a$ ,  $b$  и  $c$ , при которых матрицы  $A$  и  $B$  являются обратными

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} a-1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & c-2 \\ 4 & b & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -8 & 3 & -6 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} a-3 & 3 & 5 \\ 0 & c & 3 \\ -5 & -1 & b-4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -15 & 29 & 12 \\ 10 & -19 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} a-2 & 0 & 1 \\ -8 & b+4 & -6 \\ -4 & 2 & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} a & -2 & -1 \\ -15 & b+20 & 12 \\ 10 & -19 & 2c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

**3.25.** Решите матричное уравнение

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } X \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{д) } X \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{е) } X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ж) } \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{з) } X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{и) } \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{к) } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

## 4. Системы линейных уравнений

4.1. Решите систему уравнений

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 1 \\ 3x_1 + 8x_2 - 10x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -3 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1 \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

4.2. Найдите фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений. Запишите ответ в векторном виде.

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 12x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Gamma) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta) \begin{cases} x_1 - 22x_2 + x_3 + 250x_4 = 0 \\ 2x_1 - 44x_2 + 3x_3 + 180x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{e)} \begin{cases} x_1 + 33x_2 + x_3 - 150x_4 = 0 \\ 3x_1 + 99x_2 + 4x_3 + 270x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ж)} \begin{cases} x_1 - 40x_2 - x_3 + 120x_4 = 0 \\ 4x_1 - 160x_2 - 3x_3 + 640x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{з)} \begin{cases} x_1 - 35x_2 - x_3 + 130x_4 = 0 \\ 3x_1 - 105x_2 - 2x_3 + 150x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{и)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 6x_1 - x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{к)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{л)} \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{м) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 11x_4 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 11x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$$

**4.3.** Представьте общее решение системы уравнений в виде суммы частного решения и общего решения соответствующей однородной системы

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ -3x_1 - 2x_2 + 12x_3 - 7x_4 = -5 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 8 \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 11x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 6 \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 + 12x_4 = 10 \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\text{ж) } \begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 - 11x_3 - 7x_4 = 2 \\ 3x_1 - 5x_2 - 13x_3 - 11x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\text{з) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 = 7 \end{cases}$$

$$\text{и) } \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

**4.4.** При каких значениях параметра  $a$  однородная система линейных

уравнений, заданных матрицей  $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 1 \\ -2 & a+6 & 5 \end{pmatrix}$ , имеет ненулевое

решение?

**4.5.** При каких значениях параметра  $a$  однородная система линейных

уравнений, заданных матрицей  $\begin{pmatrix} 3 & 2+a & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ , имеет ненулевое

решение?

**4.6.** При каких значениях параметра  $a$  однородная система линейных

уравнений, заданных матрицей  $\begin{pmatrix} 1 & 2+a & 2 \\ 2 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ , имеет ненулевое

решение?

**4.7.** Найдите базис линейного пространства векторов, ортогональных векторам  $(1; -2; 0; 34)$  и  $(3; -5; 0; 79)$ . Запишите ответ в векторном виде.

**4.8.** Найдите базис линейного пространства векторов, ортогональных векторам  $(1; 2; 0; 42)$  и  $(3; 7; 0; 109)$ . Запишите ответ в векторном виде.

**4.9.** Найдите базис линейного пространства векторов, ортогональных векторам  $(1; -3; 0; -31)$  и  $(2; -5; 0; -107)$ . Запишите ответ в векторном виде.

**4.10.** Предприятие выпускает 3 вида изделий с использованием 2-х видов сырья. Для продукции ценовой вектор  $\mathbf{p} = (6, 20, 100)$ , вектор наличного сырья  $\mathbf{s} = (38, 96)$ , нормы расходов сырья даны элементами матрицы  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 18 \end{pmatrix}$ . Требуется определить максимальную стоимость продукции  $\mathbf{P}$  и оптимальный вектор-план выпуска продукции  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$  при полном использовании всего сырья, т.е. надо найти максимум  $\mathbf{P} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}^T$ , если  $\mathbf{q}$  – решение системы  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{q}^T = \mathbf{s}^T$ . При решении следует учесть, что все величины  $q_1, q_2, q_3$  – неотрицательны.

**4.11.** Предприятие выпускает 3 вида изделий с использованием 2-х видов сырья. Для продукции ценовой вектор  $\mathbf{p} = (7, 20, 100)$ , вектор наличного сырья  $\mathbf{s} = (38, 96)$ , нормы расходов сырья даны элементами матрицы  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 18 \end{pmatrix}$ . Требуется определить максимальную стоимость продукции  $\mathbf{P}$  и оптимальный вектор-план выпуска продукции  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$  при полном использовании всего сырья, т.е. надо найти максимум  $\mathbf{P} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}^T$ , если  $\mathbf{q}$  – решение системы  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{q}^T = \mathbf{s}^T$ . При решении следует учесть, что все величины  $q_1, q_2, q_3$  – неотрицательны.

**4.12.** Предприятие выпускает 3 вида изделий с использованием 2-х видов сырья. Для продукции ценовой вектор  $\mathbf{p} = (8, 30, 100)$ , вектор наличного сырья  $\mathbf{s} = (28, 65)$ , нормы расходов сырья даны

элементами матрицы  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 5 & 19 \end{pmatrix}$ . Требуется определить максимальную стоимость продукции  $\mathbf{P}$  и оптимальный вектор-план выпуска продукции  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$  при полном использовании всего сырья, т.е. надо найти максимум  $\mathbf{P} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}^T$ , если  $\mathbf{q}$  – решение системы  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{q}^T = \mathbf{s}^T$ . При решении следует учесть, что все величины  $q_1, q_2, q_3$  – неотрицательны.

## 5. Собственные значения и собственные векторы матриц

5.1. Найдите собственные векторы и собственные значения матрицы

а)  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

б)  $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

в)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

г)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

5.2. Найдите  $|\cos \varphi|$ , где  $\varphi$  - угол между собственными векторами, соответствующими различным собственным значениям

а)  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

б)  $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

в)  $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$

г)  $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

**5.3.** Найдите собственные векторы и собственные значения матрицы

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

**5.4.** При каком значении параметра  $a$  матрица  $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  имеет

собственный вектор  $\vec{v} = (-3; 1; a-1)$ , соответствующий собственному значению  $\lambda = 5$ ?

**5.5.** При каком значении параметра  $a$  матрица  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$  имеет

собственный вектор  $\vec{v} = (2; 3; a-1)$ , соответствующий собственному значению  $\lambda = 2$ ?

**5.6.** При каком значении параметра  $a$  матрица  $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  имеет

собственный вектор  $\vec{v} = (1; 3; a - 2)$ , соответствующий собственному значению  $\lambda = 3$ ?

**5.7.** Проверьте, что вектор  $\mathbf{X}$  является собственным вектором матрицы  $\mathbf{A}$  и найдите соответствующее ему собственное значение  $\lambda$ .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -15 & -5 & 23 & 4 \\ -33 & -13 & 49 & 14 \\ -13 & -5 & 21 & 4 \\ -18 & -5 & 23 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**5.8.** Проверьте, что вектор  $\mathbf{X}$  является собственным вектором матрицы  $\mathbf{A}$  и найдите соответствующее ему собственное значение  $\lambda$ .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 23 & -52 \\ 7 & 16 & 39 & -56 \\ 11 & 20 & 27 & -52 \\ 11 & 20 & 33 & -58 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**5.9.** Проверьте, что вектор  $\mathbf{X}$  является собственным вектором матрицы  $\mathbf{A}$  и найдите соответствующее ему собственное значение  $\lambda$ .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 20 & -4 & 28 & -24 \\ 40 & 2 & 54 & -64 \\ 16 & 2 & 6 & -16 \\ 26 & -3 & 23 & -28 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Болгов В.А., Демидович Б.П., Ефимов А.В. и др. Сборник задач по математике. М.: Наука, 1986.
2. Зимина О.В., и др. Высшая математика. Решебник. М.: Физико-математическая литература, 2001.
3. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. СПб.: Лань, 2007.
4. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие. Под ред. В.И.Ермакова. М.: ИНФРА-М, 2005.
5. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике. Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2001.

## Ответы

- 1.1. 9. 1.2.  $\pm 3$ . 1.3.  $\vec{a} = (1; -1; \pm\sqrt{2})$ . 1.4.  $\vec{a} = \pm(2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$ .
- 1.5.  $D(9; -5; 6)$ . 1.6. 7. 1.7. 3,  $\sqrt{21}$ . 1.8.  $\sqrt{17}$ . 1.9.  $\sqrt{34}/2$  и  $\sqrt{42}/2$ .
- 1.10. а) 161. 1.10. б) 9. 1.10. в) -184. 1.11. а)  $2 + \sqrt{3}$ . 1.11. б) 28.
- 1.12. 22. 1.13.  $\sqrt{97}$  и 7. 1.14.  $\cos \varphi = 43/(25\sqrt{13})$ . 1.15.  $120^0$ .
- 1.16.  $60^0$ . 1.17.  $\frac{8}{\sqrt{18}}$ . 1.18. 4. 1.19. -6. 1.20. -2.
- 1.21.  $\vec{x} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ . 1.22. (1; -3; 2). 1.23.  $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ .
- 1.24.  $\vec{x} = 2\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ . 1.25. (2; -1; -2). 1.26. (-1; -3; 5).
- 2.1.  $3x - 2y - 2z - 18 = 0$ . 2.2.  $2y - 3z + 7 = 0$ . 2.3.  $x + y - 4 = 0$ .
- 2.4.  $2x + y = 0$ . 2.5.  $6y - 5z = 0$ . 2.6.  $x + y + z - 12 = 0$ .
- 2.7.  $2x + y + z - 4 = 0$ . 2.8.  $5x - 3y + 2z + 1 = 0$ . 2.9.  $x - 2y - 3z - 4 = 0$ .
- 2.10.  $\varphi = \pi/4$ . 2.11.  $\varphi = \pi/3$ . 2.12.  $2x + 3y + 4z - 3 = 0$ .
- 2.13.  $2x + y - 2z - 15 = 0$ . 2.14.  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-6}{4} = \frac{z+2}{-5}$ .
- 2.15.  $\frac{x-3}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$ . 2.16. Нет. 2.17.  $\frac{x-3}{0} = \frac{y}{5} = \frac{z}{-2}$ . 2.18.  $\varphi = \pi/3$ .
- 2.19.  $\varphi = \pi/6$ . 2.20.  $a = 4$ . 2.21.  $a = 3$ . 2.22. (2; -1; 3). 2.23. (1; 1; 2).
- 2.24. (1, -1, -3). 2.25. При  $a \neq -1$  пересекаются, при  $a = -1$  параллельны. 2.26.  $y + z + 1 = 0$ . 2.27.  $x - 2y + z = 0$ .
- 2.28. (1; -0,5; -0,5). 2.29. (1,5; -0,5; 0). 2.30.  $\sqrt{30}$ . 2.31. (3; 3; 3).
- 2.32. (2; 0; -1). 2.33.  $\frac{x-1}{5} = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{-1}$ . 2.34. (-5; 6; 1). 2.35. (3; 1; 1).
- 2.36.  $x + 3y + 6z - 23 = 0$ . 2.37.  $2x + y + 2z - 9 = 0$ . 2.38. (4; 1; -1).
- 2.39. (6; -1; 1).

$$3.7. \text{ а) } A^3 = \begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}. \quad 3.7. \text{ б) } A^3 = \begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}.$$

$$3.7. \text{ в) } A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{15} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}. \quad 3.7. \text{ г) } A = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3.7. \text{ д) } A = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}. \quad 3.8. \text{ а) } 2. \quad 3.8. \text{ б) } 1. \quad 3.8. \text{ в) } 2. \quad 3.8. \text{ г) } 3.$$

3.8. д) 3. 3.8. е) 2. 3.8. ж) 3. 3.8. з) 3. 3.8. и) 3. 3.8. к) 2.

3.9. а) линейно зависима. 3.9 б) линейно независима. 3.9. в) линейно независима. 3.9. г) линейно зависима. 3.9. д) линейно зависима.

3.9. е) линейно независима. 3.11. (2; -1; -2). 3.12. (-1; -3; 5).

3.13 а) 10. 3.13 б) -31. 3.13 в) -10. 3.13 г) 8. 3.13 д) 87. 3.13. е) 10.

3.14. а)  $2a - 8b + c + 5d$ . 3.14. б)  $-x - y - z + 4t$ .

3.15. а)  $8x + 15y + 12z - 19t$ . 3.15. б)  $3a - b + 2c + d$ . 3.16. а) 40.

3.16. б) -30. 3.16. в) 18. 3.16. г) -36. 3.16. д) -40. 3.16. е) -150.

3.16. ж) -10. 3.16. з) 5. 3.17.  $a = 4$ . 3.18.  $a = -2$ . 3.19.  $a \neq -9/7$ .

$$3.20. a \neq 8, 8. \quad 3.21. a = 3. \quad 3.22. a = -2. \quad 3.23. \text{ а) } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$3.23. \text{ б) } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}. \quad 3.23. \text{ в) } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}. \quad 3.23. \text{ г) } \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$3.23. \text{ д) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$3.23. \text{ е) } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}. \quad 3.23. \text{ ж) } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -7 & -3 \\ -1 & 10 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$3.23. \text{ з) } \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 12 & 10 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}. \quad 3.23. \text{ и) } \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1,5 & 2,5 & -1 \\ 9 & -13 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$3.23. \kappa) \begin{pmatrix} -10 & 3 & 8 \\ -11 & 3 & 9 \\ 14 & -4 & -11 \end{pmatrix}. \quad 3.24. \text{ а) } a = -2, b = 2, c = 4.$$

$$3.24. \text{ б) } a = -1, b = 3, c = 2. \quad 3.24. \text{ в) } a = 3, b = -1, c = -3.$$

$$3.24. \text{ г) } a = 1, b = 9, c = -4. \quad 3.25. \text{ а) } -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 24 \\ -12 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3.25. \text{ б) } \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -23 & 43 & -4 \\ -10 & 14 & 1 \end{pmatrix}. \quad 3.25. \text{ в) } -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 9 & 18 & -45 \end{pmatrix}.$$

$$3.25. \text{ г) } -\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}. \quad 3.25. \text{ д) } -\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 17 & 7 \\ -19 & -8 \end{pmatrix}. \quad 3.25. \text{ е) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1,5 & -1,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

$$3.25. \text{ ж) } \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 10 & -2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}. \quad 3.25. \text{ з) } \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 10 & 11 & -3 \end{pmatrix}. \quad 3.25. \text{ и) } \begin{pmatrix} 35 & -22 \\ 59 & -37 \end{pmatrix}.$$

$$3.25. \text{ к) } \begin{pmatrix} -50 & -76 \\ 40 & 61 \end{pmatrix}.$$

$$4.1. \text{ а) } x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 2. \quad 4.1. \text{ б) } x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 2.$$

$$4.1. \text{ в) } x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 1. \quad 4.1. \text{ г) } x_1 = -7, x_2 = 7, x_3 = 5. \quad 4.4. a = 2.$$

$$4.5. a = -4. \quad 4.6. a = 3. \quad 4.10. \mathbf{P} = 518, \mathbf{q} = (3, 0, 5). \quad 4.11. \mathbf{P} = 526, \\ \mathbf{q} = (18, 20, 0). \quad 4.12. \mathbf{P} = 350, \mathbf{q} = (10, 9, 0).$$

$$5.1 \text{ а) } \lambda = 1: (1; 1), \lambda = 3: (1; -1). \quad 5.1 \text{ б) } \lambda = 3: (1; 1), \lambda = 5:$$

$$(1; -1). \quad 5.1. \text{ в) } \lambda = -2: (3; -4), \lambda = 5: (1; 1). \quad 5.1. \text{ г) } \lambda = -1: (1; -1), \lambda = 5:$$

$$(1; 2). \quad 5.2. \text{ а) } 1/\sqrt{10}. \quad 5.2. \text{ б) } 4/\sqrt{65}. \quad 5.2. \text{ в) } 3/\sqrt{130}. \quad 5.2. \text{ г) } 3/\sqrt{58}.$$

$$5.3. \text{ а) } \lambda_1 = 2, (1; 1; 0); \lambda_2 = 3, (2; 1; 0), (0; 0; 1). \quad 5.3. \text{ б) } \lambda_1 = 2, (1; 0; 0),$$

$$(0; 1; 1); \lambda_2 = 4, (1; 1; -1). \quad 5.3. \text{ в) } \lambda_1 = 1, (2; -1; 2); \lambda_2 = 3, (1; -2; -1);$$

$$\lambda_3 = 5, (0; 1; 0). \quad 5.3. \text{ г) } \lambda_1 = 2, (0; 1; 0); \lambda_2 = 3, (1; 3; 1); \lambda_3 = 5, (3; 1; -3).$$

$$5.4. a = 3. \quad 5.5. a = 4. \quad 5.6. a = 3. \quad 5.7. \lambda = 2. \quad 5.8. \lambda = -4.$$

$$5.9. a = -12.$$