

Б.Л. Фейгин: Темы курсовых работ

Литература к этим темам намеренно не приводится. Хочется, чтобы выбравший немного о задаче бы подумал, а потом подошел бы и спросил, что имеется в виду и что делать.

1. (Тождество Амицура–Левицкого) Пусть A_1, A_2, \dots, A_{2n} – произвольные $n \times n$ -матрицы. Тогда

$$\sum (-1)^{\text{sign}(\sigma)} A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \dots A_{\sigma(2n)} = 0.$$

Суммирование производится по всем перестановкам чисел $1, 2, \dots, 2n$.

2. (Формула Дайсона) Рассмотрим симметрический многочлен от k переменных

$$P_n(x_1, \dots, x_k) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)^{2n}.$$

Многочлен P_n можно разложить по мономиальному базису $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_k^{i_k}$, где $\sum i_s = (k-1)nk$. Показать, что коэффициент при $x_1^{(k-1)n} x_2^{(k-1)n} \dots x_k^{(k-1)n}$ равен $\frac{(kn)!}{(n!)^k}$.

3. Представление колчана $\bullet \rightrightarrows \bullet$ – это пара векторных пространств V_1, V_2 и два линейных отображения A, B из V_1 в V_2 . Расклассифицировать все такие представления с точностью до изоморфизма. Два представления V_1, V_2, A, B и V'_1, V'_2, A', B' изоморфны (эквивалентны), если $A' = C_2 A C_1$, $B' = C_2 B C_1$, где $C_1 : V'_1 \rightarrow V_1$, $C_2 : V_2 \rightarrow V'_2$ – обратимые линейные отображения.

4. (Формула Макмагона) Разбиение – это невозрастающая последовательность неотрицательных целых чисел $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots)$, которые начиная с некоторого места равны нулю. Разбиение $\mu = (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots)$ содержится в λ (обозначение $\lambda \succ \mu$), если для всех i $\lambda_i \geq \mu_i$. Вес $|\lambda|$ разбиения λ – это $\sum \lambda_i$.

Хорошо известно тождество:

$$\sum_{\lambda} q^{|\lambda|} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\dots}$$

Тождество Макмагона

$$\sum_{\lambda \succ \mu} q^{|\lambda|+|\mu|} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)^2(1-q^3)^2\dots}$$

5. Пусть S^2 – двумерная сфера. На произведении $S^2 \times S^2 \times \dots \times S^2$ действует симметрическая группа Σ_n .

а) Доказать, что $(S^2 \times S^2 \times \dots \times S^2)/\Sigma_n$ – гладкое многообразие, и отождествить его с многообразием прямых в $(n+1)$ -мерном комплексном пространстве, т.е. с $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

б) Аналогичный вопрос, когда S^2 заменяется 2-мерным тором.