О. А. Демидова

МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА С ЭНДОГЕННОЙ СКОРОСТЬЮ РОСТА ПОПУЛЯЦИИ

Введение

В большинстве моделей экономического роста (обзор которых можно найти, например, в статье [1], федеральном образовательном портале [2]) делается предположение о том, что прирост населения (рабочей силы) является положительным и обычно пропорциональным его численности. Однако в настоящее время во многих странах наблюдается не рост, а убыль численности населения. Например, в России численность населения сокращается, начиная с 1992 г. Одной из основных причин этого явления, по-видимому, можно считать падение реальных доходов жителей. По данным Госкомстата [3], в России в течение 10 лет у более 20 % населения доходы ниже официального прожиточного минимума.

В данной работе анализируется модель экономического роста, подобная модели R. Solow [4], но в ней учитывается зависимость прироста населения от его доходов с помощью модели

$$dL/dt = Ln(Y/L; m), \tag{1}$$

где L — численность трудоспособного населения, причем скорость роста популяции n не является константой, а зависит от стоимости минимальной потребительской корзины m и выпуска в расчете на одну трудовую единицу Y/L.

Аналитически проще всего использовать линейную форму зависимости, предложенную в статье [5]:

$$n(Y/L, m) = l(Y/L - m)$$

где l — коэффициент пропорциональности.

Численность популяции растет (уменьшается), если средний выпуск на одного жителя больше (меньше) стоимости потребительской корзины, и чем значительнее это отклонение, тем быстрее растет (сокращается) популяция.

Модель

Изучаемая в работе модель экономического роста с эндогенной скоростью роста популяции имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &Y = F(K,L) \\ &dK/dt = sY - d\,K \\ &dL/dt = l(Y - mL) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где Y — выпуск, L — трудовые ресурсы, K — капитал, s — доля выпуска, идущая на инвестиции, δ — норма выбытия, F — производственная функция, являющаяся однородной функцией первой степени.

Введя переменные выпуска и капитала в расчете на одну трудовую единицу $y = Y/L, k = K/L$ и обозначив $f(k) = F(k,1)$, путем несложных выкладок, учитывая уравнения системы (2), можно получить дифференциальное уравнение для k:

$$dk/dt = (s - lk)\,f(k) + (ml - d\,)k\,. \qquad (3)$$

Стационарное решение

Если функция $f(k)$ в уравнении (3) удовлетворяет условиям

$$\left.\begin{aligned} &1)\, f(0) = 0 \\ &2)\, f^{'}(k) \ge 0 \\ &3)\, f^{''}(k) < 0 \\ &4)\, f^{'}(k) \xrightarrow[k \to +0]{} \infty \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

то уравнение (3) имеет тривиальное стационарное решение и нетривиальное стационарное решение k^*, удовлетворяющее уравнению:

$$(s - lk)\,f(k) = (d - ml)k\,.$$

Если $d = ml$, то $k^* = s/l$, если $d \ne ml$, то k^* является решением уравнения

$$f(k) = R(k), \qquad (5)$$

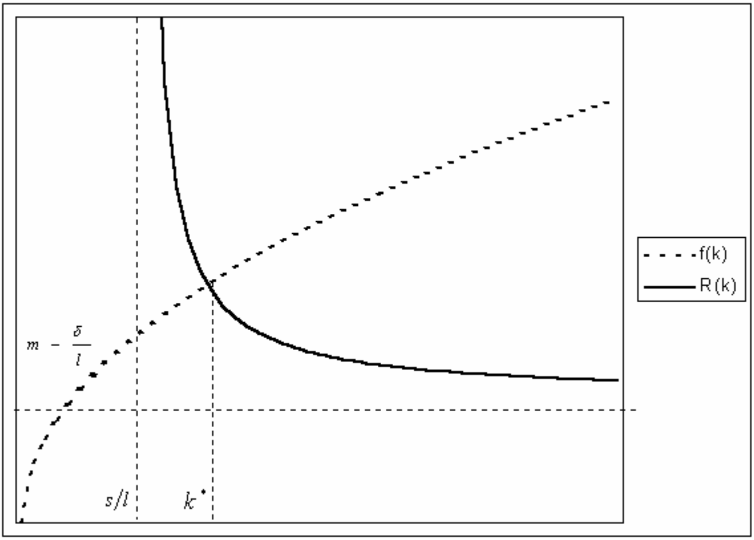

Рис. 1. $m > d / l$

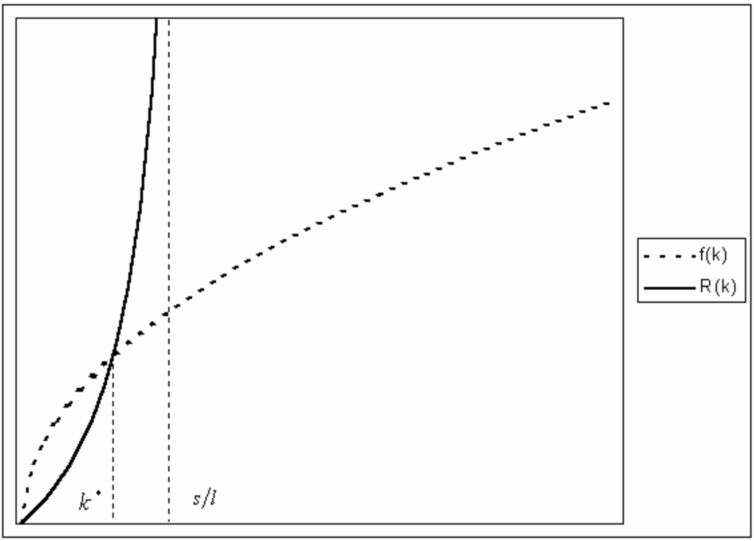

Рис. 2. $m < d / l$

где $R(k)=\dfrac{(d-ml)k}{s-lk}$.

Из рис. 1, 2 очевидно, что если функция $f(k)$ удовлетворяет условиям (4), то уравнение (5) имеет единственное нетривиальное решение, причем, если величина прожиточного минимума m удовлетворяет условию $m<d/l$ $(m>d/l)$, то $k^*<s/l$ $(k^*>s/l)$.

Устойчивость стационарного решения

Покажем, что нетривиальное стационарное решение уравнения (3) является устойчивым по линейному приближению.

Пусть $k=k^*+\Delta k$, где $\Delta k\to 0$. Тогда Δk является решением уравнения

$$d\Delta k/dt=-lk^{*a}+(a-1)k^{*(a-1)}(s-lk^*)+o(\Delta k), \tag{6}$$

откуда следует, что при $m\le d/l$ верно неравенство $dk/dt<0$, т.к. в этом случае $s/l\ge k^*$.

Перегруппировкой правой части уравнение (6) может быть переписано в следующем виде:

$$d\Delta k/dt=k^{*(a-1)}(a(s-lk^*)-s)+o(\Delta k).$$

Таким образом, и при выполнении условия $m>d/l$, при котором $s/l<k^*$, выполняется неравенство $dk/dt<0$.

Следовательно, нетривиальное стационарное решение уравнения (3) всегда устойчиво по линейному приближению.

Свойства стационарного решения для уравнения с производственной функцией Кобба — Дугласа

Исследуем зависимость стационарного решения k^* от параметров s, δ, m в случае, когда $F(K,L)$ является функцией Кобба—Дугласа с постоянной отдачей от масштаба и $f(k)=k^\alpha$, где α — коэффициент эластичности по капиталу.

В этом случае стационарное решение удовлетворяет уравнению

$$k^a=\frac{(d-ml)k}{s-lk} \tag{7}$$

Из этого соотношения легко выразить *s*, δ, *m* через *k*:

$$s = (d - ml)k^{1-a} + lk\,, \tag{8}$$

$$d = ml + sk^{a-1} - lk^{a}\,, \tag{9}$$

$$m = k^{a} + \frac{d - sk^{a-1}}{l}\,. \tag{10}$$

Из соотношения (8) с помощью теоремы о производной обратной функции можно найти:

$$dk/ds = \frac{k}{(1-a)s + a\,lk}\,, \tag{11}$$

т. е., как и в модели R.Solow, норма капитала на единицу рабочей силы возрастает с ростом нормы сбережений.

Из формул (9), (10) очевидно, что δ является убывающей, а *m* — возрастающей функцией от *k*. Такими же являются и соответствующие обратные функции. Норма капитала на единицу рабочей силы убывает с ростом нормы выбытия (как и в модели R.Solow) и возрастает с ростом стоимости минимальной потребительской корзины.

«Золотое правило инвестиций» для модифицированной модели с производственной функцией Кобба—Дугласа

Как было показано ранее, при всех положительных значениях параметров *s*, *l*, *m*, δ существует единственное асимптотически устойчивое стационарное решение уравнения (3) для капитала *k* в расчете на одну трудовую единицу.

Зафиксировав все параметры, кроме *s*, найдем такой уровень сбережений, при котором в стационарном состоянии потребление $c = (1 - s)(k^{*}(s))^{\alpha}$ максимально.

Продифференцировав *c* по *s* и учитывая формулу (10), получаем:

$$\partial c/\partial s = k^{a}\,\frac{a - s - a\,k(s)}{(1-a)s + a\,lk}\,. \tag{12}$$

Следовательно, потребление достигает максимума при некотором уровне инвестиций *s*, определяемом из условия

$$a - s = a\,lk^*(s)\,. \tag{13}$$

Из формулы (5) с $f(k) = k^a$ и рис. 1, 2 очевидно, что если $m < d\,/\,l$, то $k^*(0) = 0$, а если $m > d\,/\,l$, то $k^*(0) = (m - d\,/\,l)^{1/a}$.

Так как функция в левой части уравнения (12) является убывающей по *s*, а в правой части — возрастающей, то при $m < d\,/\,l$ уравнение (12) всегда имеет решение, а при $m > d\,/\,l$ это уравнение имеет решение при выполнении условия $a > a\,l(m - d\,/\,l)^{1/a}$ или

$$m < \frac{d}{l} + l^{-1/a}\,. \tag{14}$$

Если же условие (14) не выполняется, например, при слишком большой стоимости потребительской корзины *m* или малой норме выбытия, то $\partial c\,/\,\partial s \le 0$, и рост инвестиций будет приводить к сокращению потребления.

Численность популяции в стационарном состоянии

Если в модели типа R.Solow происходит экспоненциальный рост популяции с постоянной скоростью, то в предложенной модели скорость роста популяции зависит от динамики выпуска в расчете на одну трудовую единицу.

Действительно, третье уравнение в системе (2) может быть переписано в следующем виде:

$$dL\,/\,dt = lL(f(k) - m)\,.$$

Учитывая, что стационарное решение уравнения (3) k^* является решением уравнения (5) и, следовательно,

$$f(k^*) - m = \frac{d\,k^* - ms}{s - lk^*}\,,$$

с помощью рис. 1 и 2 можно показать, что $dL\,/\,dt > 0$ при выполнении условия

$$s > d\,m^{-1+1/a}\,. \tag{15}$$

В противном случае $dL\,/\,dt < 0$.

Таким образом, для возрастания численности популяции увеличение нормы амортизации или стоимости минимальной потребительской корзины должно сопровождаться ростом инвестиций.

Выводы

В работе было проведено аналитическое исследование модели экономического роста типа R. Solow с эндогенной скоростью роста популяции. В качестве экзогенных параметров были выбраны доля выпуска, идущая на инвестиции s, норма амортизации δ, стоимость минимальной потребительской корзины m и коэффициент l, характеризующий скорость роста или сокращения популяции в зависимости от разности выпуска в расчете на одну трудовую единицу и стоимости минимальной потребительской корзины.

Были получены следующие результаты:

1) При любых положительных значениях параметров размер капитала в расчете на одну трудовую единицу стремится к некоторому стационарному, для которого найдены оценки.
2) В стационарном состоянии норма капитала в расчете на одну трудовую единицу возрастает при увеличении нормы сбережений s и стоимости минимальной потребительской корзины m и убывает с ростом нормы амортизации δ.
3) Если параметры модели удовлетворяют условию (14), то в стационарном состоянии при увеличении доли инвестиций s потребление c сначала возрастает, достигая максимума при s, определяемом из уравнения (13), а затем убывает. Если же условие (14) не выполняется, то при росте инвестиций потребление снижается.
4) В стационарном состоянии (для размера капитала в расчете на одну трудовую единицу) численность популяции возрастает при выполнении условия (14) и убывает в противном случае.

Таким образом, увеличение стоимости минимальной потребительской корзины не приведет к сокращениям потребления и численности населения, если будет сопровождаться ростом инвестиций.

Литература

1. *Solow R. M.* Perspectives on growth theory// Journal of economic perspectives. 1994. Vol. 8. № 1. P. 45–54.
2. www.ecsocman.edu.ru.
3. www.gks.ru — сайт Госкомстата России.
4. *Solow R. M.* A contribution to the theory of economic growth// Quaterly journal of economics. LXX, 1956. P. 65–94.
5. *Pingle M.* Introduction dynamic analysis using Malthus’s Principle of Population// Economic Education. 2003. Vol. 34. № 1.