Хаос в гамильтоновых системах.

А.Новик

Аннотация

Хорошо известно, что в детерменированных динамических системах при отсутствии достаточного числа первых интегралов поведение траекторий может становиться очень сложным и носить хаотический характер. Для изучения этих явлений часто рассматриваются системы, отличающиеся от интегрируемых малыми возмущениями. Первые шаги в построении современной теории хаоса в детерменированных системах сделал Пуанкаре, открыв явление расщепления сепаратрисс в гамильтоновых системах. При этом во многих ситуациях, расщепление сепаратрис оказывается экспоненциально малым относительно возмущения. В этом случае, стандартная техника предложенная Пуанкаре перестает работать и анализ хаотических явлений затрудняется. В настоящей заметке обсуждается роль экспоненциально-малых эффектов в хаотической динамике и приводятся некоторые новые результаты.

1 Теорема Колмогорова о сохранении инвариантных торов.

Рассмотрим гамильтонову систему с гамильтонианом:

$$H = H_0(y) + \varepsilon H_1(x, y, \varepsilon).$$

Здесь $x \in \mathbf{R}^n, \quad y \in \mathbf{R}^n$. Переменные (x, y) являются переменными "действие-угол"в невозмущенной системе (при $\varepsilon = 0$). В системе с гамильтонианом $H_0(y)$ переменные "действие"являются первыми интегралами и их значения нумеруют совместные поверхности уровней интегралов. Эти поверхности гомеоморфны n-мерным торам и траектории системы представляют собой обмотки этих торов. На торе $y = y_0$ вектор частот ν вычисляется по формуле:

$$\nu = \frac{\partial H(y_0)}{\partial y}.$$

Будем говорить, что частоты на торе рационально-несоизмеримы если

$$\langle \nu, k \rangle \neq 0,$$

ни для какого целочисленного вектора $k \neq 0$. (Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ - стандартное скалярное произведение.)Если частоты на торе рационально несоизмеримы, он называется нерезонансным. Траектория обматывает такой тор всюду плотно. Если частоты соизмеримы, то инвариантный тор называется резонансным, и в свою очередь расслоен на торы меньшей размерности. Невозмущенная система называется невырожденной если

$$\det\left(\frac{\partial^2 H_0(y)}{\partial y^2}\right) \neq 0.$$

Если невозмущенная система невырождена в некоторой области D, то те значения y которые соответствуют нерезонансным торам, всюду плотны в D.

Пусть $\nu = \frac{\partial H_0}{\partial y}$ - вектор частот. Если существуют положительные числа c γ, такие что для всех $k \in \mathbf{Z}^n, \quad k \neq 0:$

$$\langle \nu, k\rangle \geq \frac{1}{c\|\nu\|},$$

то вектор частот частот называется диофантовым. Символ $\|\cdot\|$ обозначает некоторую норму в $\mathbf{R}^n$. Напомним, что в $\mathbf{R}^n$ все нормы эквивалентны и поэтому ее выбор большого значения не имеет.

Знаменитая теорема Колмогорова описывает судьбу условно-периодических движений при наложении возмущения.

Если невозмущенная система невырождена в точке $y = y_0$ и вектор частот ν соответствующий этому значению y_0, диофантов, то невозмущенный тор $y = y_0$ не разрушится при малых $\varepsilon \neq 0$, а лишь слегка деформируется и по-прежнему будет нести условно-периодические движения с теми же частотами ν.

Заметим, что уже в случае трех степеней свободы трехмерный тор не делит пятимерный уровень энергии. В такой ситуации имеет место явление называемое диффузией Арнольда. Оно состоит в том что за большое время переменая "действие"может заметно изменяться вдоль некоторых траекторий. Причиной этого явления оказываются экспоненциально-малые хаотические явление такие как расщепление сепаратрисс и образование стохастического слоя. В случае двух степеней свободы, уровень энергии трехмерен и траектория остается вечно запертой между двумя соседними двумерными инвариантными торами.

2 Расщепление сепаратрисс и стохастический слой.

Пуанкаре показал, что в случае двух степеней свободы при разрушении резонансного тора выживает четное число периодических решений. На двумерном резонансном торе частоты ν_1 и nu_2 связаны соотношением:

$$p\nu_1 + q\nu_2 = 0$$

Числа p и q - целые и взаимно-простые. Половина из них гиперболические, половина - эллиптические. В окрестности резонансного тора можно сделать такую замену переменных, что траектории периодических решений - малые экваторы тора. К гиперболическим решениям примыкают пары многообразий, состоящих из решений стремящихся к данному гиперболическому при $t \to +\infty$ (устойчивое многообразие Γ^+) и при $t \to -\infty$ (неустойчивое - Γ^-). Можно предъявить несколько различных количественных характеристик расщепления асимптотических многообразий. Наиболее естественной с инвариантной точки зрения представляется симплектическая площадь области, возниакющей при сечении многообразий Γ^+ и Γ^-, трансверсальной к потоку возмущенной системы поверхностью (См. Рис.1.). В дальнейшем эту величину будем обозначать $\mathcal{A}(\varepsilon)$. С помощью формулы Стокса можно показать, что величина $\mathcal{A}$ не зависит от выбора секущей поверхности.

На каждом положительном уровне энергии $M_h = H = h > 0$ возмущенной системы образуется область хаотических движений, называемая стохастическим слоем. Формальное определение стохастического слоя следующее. Рассмотрим на уровне энергии M_h КАМ-торы возмущенной системы в окрестности резонанса (p, q). Отношение частот на этих торах близко к $\frac{p}{q}$. Выберем T^2_+ - инвариантный тор с минимальным отношением частот меньшим, чем $\frac{p}{q}$ и T^2_- - тор с минимальным отношением частот большим чем $\frac{p}{q}$. Из теоремы Биркгофа и изоэнергетической невырожденности ситемы следует существование указанных торов. Двумерные торы $\mathrm{T}^2_\pm$ ограничивают на трехмерном уровне энергии область - ее и будем называть стохастическим слоем $\mathcal{D}_h$. Величину стохастического слоя снова будем измерять симлектической площадью сечения $\mathcal{D}_h$ какой-нибудь двумерной поверхностью $\Pi \subset M_h$, трансверсальной потоку возмущенной системы. Как и раньше, можно показать, что симплектическая площадь области $\Pi \cap \mathcal{D}_h$ не меняется при непрерывной деформации Π в классе поверхностей, трансверсальных потоку на M_h. Обозначим эту площадь $S_h(\varepsilon)$. Можно также инвариантно определить трехмерный объем $\mathcal{V}_h(\varepsilon)$, положив

$$\mathcal{V}_h(\varepsilon) = \int_{\mathcal{D}_h} \omega \wedge \omega^1,$$

где $\omega^1 = y dx$ - первообразная ω.

Пусть $y_1^{\max}$ и $y_1^{\min}$ соответственно максимальное и минимальное значение переменной y_1 на $\mathcal{D}_h$ и $\Delta = y_1^{\max} - y_1^{\min}$. Выполнено соотношение:

$$\mathcal{V}_h(\varepsilon) = \pi S_h(\varepsilon) \left(y_1^{\max} + y_1^{\min} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right).$$

Величину Δ естественно называть шириной стохастичского слоя в направлении переменной y_1.

Пусть, как говорилось ранее, $\mathcal{A}(\varepsilon)$ - симплектическая площадь области, заключнной между сепаратрисами. Из результатов Д.В.Трещева следуют оценки:

$$c_1 \log \mathcal{A}^{-1}(\varepsilon) \varepsilon^{-1} \le S_h(\varepsilon) \le c_2 \log \mathcal{A}^{-1}(\varepsilon) \varepsilon^{-1}.$$

Здесь c_1 и c_2 некоторые константы.

3 Асимптотики для $\mathcal{A}(\varepsilon)$.

Задача получения асмптотических формул для величин, характеризующих экспоненциально-малое расщепление сепаратрисс является традиционно технически сложной. Впервые В.Ф.Лазуткину удалось получить асимптотики расщепления сепаратрисс для стандартного отображения Чирикова. Позже Д.В.Трещев получил аналогичные результаты для системы "маятник с быстро осцилирующей точкой подвеса". Он предложил континуальное семейство канонических преобразований быстро ослабляющих зависимость гамильтониана от времени. Результаты касающиеся расщепления многообразий, асимптотических к периодическим решениям в системах с двумя степенями свободы впервые появились также в его работах, но без доказательства. В представленных результатах эти идеи обобщены и строго обоснованы.

Рассмотрим гамильтонову систему:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

$$H = \frac{\langle y, Ay \rangle}{2} + \varepsilon V(x), \quad x \in \mathbf{T}^2 \quad y \in \mathbf{R}^2.$$

Символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено стандартное скалярное произведение, A - матрица размера 2×2, $V(x)$ - тригонометрический полином от переменных x_1, x_2, $\varepsilon \geq 0$ - малый параметр. Тригонометрический полином предполагается вещественнозначным. Полином $V(x)$ можно задать в виде:

$$V(x) = \sum_{k \in M} V^k e^{i\langle k, x \rangle}, \quad V^k \neq 0,$$

M - конечное подмножество целочисленной решетки $\mathbf{Z}^2$. В силу предположения о вещественнозначности $V(x)$ множество M симметрично относительно точки $(0,0)$.

Основным результатом является следующая формула:

$$\mathcal{A}(\varepsilon) = 8\pi \varepsilon^{\frac{1}{2}-\alpha} e^{-\rho\theta/\sqrt{\varepsilon}} \left(W + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{1}{d_0}} \log \varepsilon^{-1}) \right).$$

Величины W, ρ, θ, α и d_0 и вычисляются как функции матрицы A, коэффицентов тригонометрического полинома $V(x)$, частот на резонансном торе и значения постоянной энергии. Основой доказательства этого результата служит, так называемый, метод непрерывного усреднения. Для того, чтобы воспользоваться стандартной техникой Пуанкаре-Мельникова нужно максимально ослабить в гаимльтониане зависимость от быстрой фазы. (Сначала в окрестности резонанса вводятся новые канонические переменные, такие что, переменная x_1 становится быстрой, а x_2 - медленной.) Вместо серии последовательных, близких к тождественной канонических замен предлагается непрерывное семейство:

$$z(\delta) : (x, y) \mapsto (x(\delta), y(\delta)), \quad x(0) = x, y(0) = y.$$

При этом в новых координатах возмущение будет порядка $e^{-c|\delta|}, c > 0$. Если взять $\delta \sim const/\sqrt{\varepsilon}$ возмущение станет экспоненциально мало. Основная трудность состоит в анализе решения задачи Коши для некоторой системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных - системы уравнений непрерывного усреднения. В общем случае она может быть исследована лишь численными методами. Однако, если наложить на на коэффициенты тригонометрического полинома $V(x)$ некоторые условия, то благодаря специфической структуре этих уравнений появляется возможность получить асимптотику величины $\mathcal{A}(\varepsilon)$ аналитически.