Преобразование Лежандра, свойства касательных и Неравенство Юнга.

А.Новик

Аннотация

Преобразование Лежандра - красивая геометрическая конструкция. Разумеется, ее значение далеко не исчерпывается приведенными в этой заметке утверждениями. Тем не менее, с помощью преобразования Лежандра могут быть получены, как вполне учебные, так и довольно нетривиальные результаты. В заметке предложен ряд задач. Некоторые из их носят тренировочный характер, некоторые - потребуют определенных усилий. Предполагается знакомство читателя с понятием производной и интеграла в объеме последних классов общеобразовательной школы. Заметка может быть интересна учителям математики, учащимся математических классов, а также всем, кому по тем или иным причинам интересна математика.

1 Определение и примеры.

Рассмотрим гладкую функцию $y = f(x)$. Для определенности, будем считать, что функция $f(x)$ выпукла вниз. Также рассмотрим прямую l_p, заданную уравнением $y = px$. По определению, преобразованием Лежандра функции $f(x)$ будем называть функцию

$$L(p) = \max_x \left(px - f(x)\right).$$

Иначе говоря, это максимальное расстояние по оси OY между прямой l_p и графиком функции $y = f(x)$.(Мы считаем, что x и p таковы, что прямая $y = px$ лежит выше кривой $y = f(x)$.)

Пусть (x_0, y_0) - точка, в которой прямая параллельная прямой l_p касается графика функции. Нетрудно видеть, что при фиксированном p точка касания x_0 будет корнем уравнения

$$p = f'(x_o).$$

Задача 1.

Вычислите преобразование Лежандра функции $y = x^2$.

Ответ:$\frac{p^2}{4}$.

Задача 2.

Вычислите преобразование Лежандра функции $y = e^x$.

Ответ:$(1-p)\ln p$.

Задача 3.

Существует ли функция $f(x)$, такая что, ее преобразованием Лежандра будет функция $f(p)$?

Указание: Внимательнее присмотритесь первой задаче.▲

Ответ: $y = \frac{x^2}{2}$.

Задача 4.

Единственна ли такая функция?

Ответ: Единственна. Это функция $y = \frac{x^2}{2}$. Набросок доказательства этого факта приведен в конце заметки в виде серии последовательных задач.▲

Вычислим преобразование Лежандра функции $y = \frac{x^\alpha}{\alpha}$. Точка x_0 в которой прямая l_p касается графика функции $y = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ находится из уравнения $p = {x_0}^{\alpha-1}$. Получаем: $x_0 = p^{\frac{1}{\alpha-1}}$. Итак:

$$L(p) = px_0 - f(x_0.)$$

Подставляя в эту формулу найденное выражение для x_0 получаем:

$$L(p) = p^{\frac{1}{\alpha-1}+1} - \frac{p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha} = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

2 Свойства касательных к графику $y = Cx^n$.

Рассмотрим график функции $y = Cx^n, n > 1$. См. Рис. Пусть прямая, параллельная прямой l_p, касается графика в точке с координатами (x_0, Cx_0^n). Очевидно $AO = L(p)$. Заметим, что если x_0 - точка касания, то

$$L(p) = nC{x_0}^n - C{x_0}^n = (n-1)C{x_0}^n.$$

Заметим что, $\triangle AOK$ подобен $\triangle MNK$ с коэффициентом подобия $k = n - 1$. Отсюда: $KN = \frac{ON}{n}$. Или $OK = \frac{n-1}{n}ON$. Если через x_1 обозначить точку пересечения касательной и оси OX, полученную формулу можно записать в виде: $x_1 = \frac{n-1}{n}x_0$.

Таким образом, касательная к графику $y = Cx^n$ при $n > 1$, проведенная в точке x_0 отсекает справа от отрезка $[0, x_0]$ $\frac{1}{n}$ -ю часть.

*Замечание:*Этот результат можно получить непосредственно, не используя преобразование Лежандра. Для этого нужно написать уравнение касательной к графику функции $y = Cx^n$. Проделайте это.▲

3 Неравенство Юнга.

Из определения преобразования Лежандра следует неравенство, выполненное при всех p и x:

$$px \le L(p) + f(x).$$

В этом неравенстве $L(p)$ - преобразование Лежандра функции $f(x)$. Если в качестве $f(x)$ взять функцию $\frac{x^\alpha}{\alpha}$, то неравенство примет вид:

$$px \le \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta}.$$

Это неравенство хорошо известно в анализе, как неравенство Юнга и выполнено для всех положительных α и β таких что,

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

Мы воспользовались тем, что при таких α и β преобразованием Лежандра функции $y = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ будет функция $L(p) = \frac{p^\beta}{\beta}$. При $\alpha = \beta = 2$ неравенство Юнга превращается в неравенство:

$$px \le \frac{x^2 + p^2}{2}.$$

которое с точностью до обозначений является неравенством о среднем геометрическом и среднем арифметическом.

4 Применим преобразование Лежандра два раза подряд.

Задача 5.

Нарисуйте двухзвенную ломаную ABC. Точка A имеет координаты $(0, 1)$, точка B - $(3, 2)$, точка C - $(4, 4)$. Постройте ее преобразование Лежандра.

Ответ:

Задача 6.

К отрезку, получившемуся в предыдущей задаче, снова примените преобразование Лежандра. Что получилось?

Ответ: Ломаная ABC из предыдущей задачи. ▲

Несколько удивительный ответ этой задачи - не случайность. Результатом "двойного"применения к ломаной ABC преобразования Лежандра снова будет ломаная ABC. Это свойство называется инволютивностью. То есть, если $\mathcal{L}(f(x))$ результат применения преобразования Лежандра к функции $f(x)$, то

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{L}(f(x))\right) = f(x).$$

Задача 7.

Пользуясь свойством инволютивеости, покажите, что если $L(p) = \mathcal{L}\left(f(x)\right)$, то $f(x) = \mathcal{L}\left(L(p)\right)$.

Докажем свойство инволютивности. Рассмотрим функцию:

$$\mathcal{L}\left(L(p)\right) = \max_p \left(xp - L(p)\right).$$

В этой формуле $L(p)$ - преобразование Лежандра функции $f(x)$, а x - новая переменная. Для начала заметим, что $L(p)$ - ордината точки в которой касательная параллельная прямой $y = px$ касается графика функции $y = f(x)$.(Это следует непосредственно из определения преобразования Лежандра.)Таким образом, уравнение касательной, имеющей угловой коэффициент p, записывается в виде:

$$y = px - L(p).$$

При каждом фиксированном $x = x_0$ величина $px_0 - L(p)$ это ордината точки в которой прямая $y = px - L(p)$ пересекает вертикальную прямую $x = x_0$. Рассмотрим все касательные к графику $y = f(x_0)$. Из рисунка () ясно, что она будет максимальна и равна $f(x_0)$ для той касательной которая проходит через точку с координатами $\left(x_0, f(x_0)\right)$. То есть при каждом x функция $\mathcal{L}\left(L(p)\right)$ совпадает с $f(x)$.

5 Функция $\frac{x^2}{2}$ - единственная функция, инвариантная относительно преобразования Лежандра.

Всюду в дальнейшем $f^{-1}(x)$ обозначает функцию обратную к $f(x)$. Напомню, что $f^{-1}(x)$ называется функцией обратной к $f(x)$ если

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

Если функция $f(x)$ инвариантна относительно преобразования Лежандра, то:

$$L(p) = \max_x (px - f(x)) = f(p).$$

Функцию $L(p)$ можно записать в виде:

$$L(p) = px_0 - f(x_0),$$

где x_0 - такая точка, что

$$p = f'(x_0) \quad \text{или} \quad x_0 = (f'(p))^{-1}.$$

Для функции $f(p)$ получим следующее уравнение:

$$f'(x_0) \cdot x_0 - f(x_0) = f(f'(x_0)).$$

Для удобства обозначим $x_0 = t$. Это уравнение довольно необычной природы. Оно содержит независимую переменную t функцию $f(t)$ и композицию самой функции и ее производной - $(f(f'(t)))$. Учитывая введенное обозначение можно последнее уравнение переписать в виде:

$$f'(t) \cdot t - f(t) = f(f'(t)).$$

Задача 8.

Докажите, что решение этого уравнения удоволетворяет соотношению :

$$f'(f'(t)) = t.$$

Указание: Продифференцируйте равенство по t. $\triangle$

Заметим, что если функция $f(t)$ выпукла вниз, то $f'(t)$ монотонно возрастает.

Задача 9.

Докажите, что существует единственная монотонно-возрастающая функция $g(t)$ такая что:

$$g(g(t)) = t.$$

Указание: Это функция $f(t) = t$. Доказательство от противного. Используйте симметрию графика функции $g(t)$ относительно прямой $y = t$. $\blacktriangle$

Таким образом, $f'(t) = t$ и значит, $f(t) = \frac{t^2}{2} + C$. Где C - некоторая константа.

Задача 10.

Докажите, что $C = 0$.