УДК 517.98

ПРИНЦИПЫ ВЫБОРА ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В. В. Чистяков[1], Ю. В. Третьяченко

Принцип выбора Хелли [10] гласит, что из равномерно ограниченной последовательности вещественных функций на отрезке $[a, b]$, вариации по Жордану которых равномерно ограничены, можно извлечь поточечно сходящуюся подпоследовательность. Эта классическая теорема имеет многочисленные приложения в теории функций, теории рядов Фурье, стохастическом анализе, комплексном анализе, теории мультифункций [6, 11, 15]. Для функций одной переменной принцип выбора Хелли обобщался в различных направлениях, в основном связанных с отказом от вещественнозначности функций и предположения о равномерной ограниченности их (обобщенных) вариаций. Наиболее общие результаты в этом случае и подробная библиография, связанная с недавними обобщениями теоремы Хелли, представлены в [8].

Для функций многих вещественных переменных теоремы типа Хелли известны в литературе не столь хорошо, что естественно связано с определенными трудностями. Отметим, например, то обстоятельство, что понятие вариации по Жордану переносится на функции многих переменных далеко неоднозначным образом [9, 11]. В связи с этим при ограничениях на некоторые типы вариаций (в частности, в рамках теории распределений [1]) получаются обобщения принципа выбора Хелли для функций двух и более переменных лишь относительно сходимости почти всюду [11, 14]. Тем не менее, если понимать вариацию для функций

[1]Автор, ответственный за переписку. E-mail: czeslaw@mail.ru.

многих переменных в смысле Витали–Харди–Краузе [7, 13], то, как показано в работах [2, 11, 12, 13], можно получить обобщение теоремы Хелли для вещественнозначных функций многих переменных в классической формулировке относительно сходимости всюду.

Цель настоящей работы — представить два варианта поточечного принципа выбора типа Хелли со сходимостью всюду для отображений n переменных со значениями в метрической полугруппе. Для таких отображений, к которым, в частности, относятся и некоторые классы мультифункций [6, Раздел 12], определяются и изучаются понятия смешанных "разностей" типа Витали и полной вариации. Теорема 1 имеет вполне классическую формулировку и базируется на теореме Хелли для полностью монотонных функций нескольких переменных [11, 13]. В теореме 2 приведено обобщения теоремы Хелли для случая, когда значения отображений лежат в рефлексивном банаховом пространстве.

1. СМЕШАННЫЕ РАЗНОСТИ И ВАРИАЦИИ

Приведем основные определения, обозначения и вспомогательные факты. Для точек $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ из $\mathbb{R}^n$ таких, что $a < b$ покоординатно, обозначим через $I_a^b = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ n-мерный прямоугольник и через $\mathcal{F}$ — множество всех отображений $f : I_a^b \to M$, действующих из I_a^b в метрическую полугруппу $(M, d, +)$, где (M, d) — метрическое пространство с метрикой d, $(M, +)$ — абелева полугруппа по сложению $+$ и d инвариантна относительно сдвигов: $d(u, v) = d(u + w, v + w)$ для всех $u, v, w \in M$. Примером метрической полугруппы служит семейство всех непустых замкнутых ограниченных выпуклых подмножеств вещественного нормированного пространства, наделенное метрикой Хаусдорфа [5]. Как обычно, греческие буквы обозначают (n-мерные) мультииндексы, и если $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, то $|\theta| = \theta_1 + \cdots + \theta_n$ — длину мультииндекса θ. Кроме того, в этом контексте 0 и 1 обозначают соответственно мультииндексы $(0,\dots,0)$ и $(1,\dots,1)$, а неравенства вида $0\leqslant\theta\leqslant\alpha$ или $\sigma\leqslant\kappa$ понимаются покоординатно.

Для $x,y\in I_a^b$, $x<y$, определим n-ую смешанную "разность" типа Витали отображения $f\in\mathcal{F}$ на подпрямоугольнике $I_x^y\subset I_a^b$ правилом:

$$\mathrm{md}_n(f,I_x^y)=d\Bigg(\sum_{\theta\in\mathcal{E}}f(x+\theta(y-x)),\sum_{\eta\in\mathcal{O}}f(x+\eta(y-x))\Bigg),$$

где $\mathcal{E}$ есть множество всех мультииндексов $\theta\leqslant 1$, для которых $|\theta|$ — четное число, $x+\theta(y-x)=(x_1+\theta_1(y_1-x_1),\dots,x_n+\theta_n(y_n-x_n))$, а $\mathcal{O}$ — множество всех мультииндексов $\eta\leqslant 1$ с нечетной длиной $|\eta|$. Под n-ой вариацией Витали отображения $f\in\mathcal{F}$ на прямоугольнике I_a^b понимается величина (в случае, когда $M=\mathbb{R}$, см. [7, 13])

$$\mathrm{V}_n(f,I_a^b)=\sup_{\mathcal{P}}\sum_{1\leqslant\sigma\leqslant\kappa}\mathrm{md}_n\big(f,I_{x[\sigma-1]}^{x[\sigma]}\big),\tag{1}$$

где супремум берется по всем мультииндексам κ и всем сеточным разбиениям $\mathcal{P}=\{x[\sigma]:\sigma\leqslant\kappa\}$ прямоугольника I_a^b с набором точек вида $x[\sigma]=x[\sigma_1,\dots,\sigma_n]=(x_1(\sigma_1),\dots,x_n(\sigma_n))\in I_a^b$, таким, что $x[0]=a$, $x[\kappa]=b$ и $x[\sigma-1]<x[\sigma]$ для всех $1\leqslant\sigma\leqslant\kappa$ (иными словами, $\mathcal{P}$ есть декартово произведение обычных разбиений отрезков $[a_i,b_i]$, $i=1,\dots,n$). Отметим, что суммы смешанных разностей из (1) монотонны в том смысле, что их значения не убывают при добавлении новых точек в разбиение $\mathcal{P}$, и I_a^b есть объединение по всем $1\leqslant\sigma\leqslant\kappa$ неналегающих прямоугольников $I_{x[\sigma-1]}^{x[\sigma]}\subset I_a^b$ со сторонами, параллельными координатным осям.

Нам понадобится также понятие вариации отображения меньшего порядка, чем n. Пусть $0\neq\alpha\leqslant 1$ и $f\in\mathcal{F}$. Следуя [7], определим срезание вектора $x\in\mathbb{R}^n$ мультииндексом α по правилу:

$$x\lfloor\alpha=(x_i\colon i\in\{1,\dots,n\},\ \alpha_i=1)\in\mathbb{R}^{|\alpha|}.$$

Отметим, что если $x \in I_a^b$, то $x\lfloor\alpha \in I_a^b\lfloor\alpha = I_{a\lfloor\alpha}^{b\lfloor\alpha} \subset \mathbb{R}^{|\alpha|}$. Для $z \in I_a^b$ определим срезанное мультииндексом α отображение $f_\alpha^z : I_a^b\lfloor\alpha \to M$ по формуле: $f_\alpha^z(x\lfloor\alpha) = f(z + \alpha(x - z))$ для всех $x \in I_a^b$, так что f_α^z зависит только от $|\alpha|$ переменных $x_i \in [a_i, b_i]$, для которых $\alpha_i = 1$, а остальные переменные фиксированы и равны z_i (при $\alpha_i = 0$). Если теперь в определении (1) заменить n на $|\alpha|$, f — на f_α^z при $z = a$ и I_a^b — на $I_a^b\lfloor\alpha$, то получим определение $|\alpha|$-ой вариации отображения $f \in \mathcal{F}$ в модификации Харди–Краузе, которая обозначается через $\mathrm{V}_{|\alpha|}(f_\alpha^a, I_a^b\lfloor\alpha)$.

Полной вариацией отображения $f \in \mathcal{F}$ в смысле Витали–Харди–Краузе [7, 11, 13] называем величину

$$\mathrm{TV}(f, I_a^b) = \sum_{0 \neq \alpha \leqslant 1} \mathrm{V}_{|\alpha|}(f_\alpha^a, I_a^b\lfloor\alpha),$$

а множество $\mathrm{BV}(I_a^b; M) = \{f \in \mathcal{F} : \mathrm{TV}(f, I_a^b) < \infty\}$ — пространством отображений ограниченной полной вариации.

В нижеследующих трех леммах собраны основные свойства смешанных разностей и вариаций всех размерностей, которые с одной стороны обобщают известные свойства вариации по Жордану функций одной переменной, а с другой — используются при доказательстве основных результатов работы (теорем 1 и 2).

Лемма 1. *Если $f \in \mathcal{F}$, $x, y \in I_a^b$, $x \leqslant y$, $z \in I_a^b$ и $0 \neq \alpha \leqslant 1$, то*

$$\mathrm{md}_{|\alpha|}(f_\alpha^z, I_x^y\lfloor\alpha) = d\Bigg(\sum_{\theta\in\mathcal{E},\ \theta\leqslant\alpha} f\big(z + \alpha(x - z) + \theta(y - x)\big), \\ \sum_{\eta\in\mathcal{O},\ \eta\leqslant\alpha} f\big(z + \alpha(x - z) + \eta(y - x)\big)\Bigg).$$

В частности, при $z = a$ и $z = x$ соответственно имеем:

$$\mathrm{md}_{|\alpha|}(f_\alpha^a, I_x^y\lfloor\alpha) = \mathrm{md}_{|\alpha|}(f_\alpha^{a+\alpha(x-a)}, I_{a+\alpha(x-a)}^y\lfloor\alpha),$$

$$\mathrm{md}_{|\alpha|}(f_\alpha^x, I_x^y\lfloor\alpha) = d\biggl(\sum_{\theta\in\mathcal{E},\,\theta\leqslant\alpha} f\bigl(x+\theta(y-x)\bigr), \sum_{\eta\in\mathcal{O},\,\eta\leqslant\alpha} f\bigl(x+\eta(y-x)\bigr)\biggr).$$

Л е м м а 2. *Если $f \in \mathcal{F}$, $x, y \in I_a^b$ и $x < y$, то*

$$d\bigl(f(x+\gamma(y-x)), f(x)\bigr) \leqslant \sum_{0\neq\alpha\leqslant\gamma} \mathrm{md}_{|\alpha|}(f_\alpha^x, I_x^y\lfloor\alpha) \quad \textit{для всех} \quad 0 \neq \gamma \leqslant 1,$$

$$\mathrm{md}_{|\alpha|}(f_\alpha^x, I_x^y\lfloor\alpha) \leqslant \sum_{\alpha\leqslant\beta\leqslant1} \mathrm{md}_{|\beta|}(f_\beta^a, I_{a+\alpha(x-a)}^{x+\alpha(y-x)}\lfloor\beta) \quad \textit{для всех} \quad 0 \neq \alpha \leqslant 1.$$

Л е м м а 3. (a) *Если $f \in \mathcal{F}$, $0 \neq \alpha \leqslant 1$ и $\mathcal{P} = \{x[\sigma] : \sigma \leqslant \kappa\}$ есть сеточное разбиение I_a^b, то $\mathrm{V}_{|\alpha|}(f_\alpha^a, I_a^b\lfloor\alpha)$ равно сумме выражений $\mathrm{V}_{|\alpha|}(f_\alpha^a, I_{x[\sigma-1]}^{x[\sigma]}\lfloor\alpha)$ по всем мультииндексам $1 \leqslant \sigma \leqslant \kappa$ (аддитивность $|\alpha|$-ой вариации).*

(b) *Если последовательность отображений $\{f_j\} = \{f_j\}_{j=1}^\infty$ из $\mathcal{F}$ поточечно на I_a^b сходится при $j \to \infty$ к отображению $f \in \mathcal{F}$, то $\mathrm{TV}(f, I_a^b) \leqslant \liminf_{j\to\infty} \mathrm{TV}(f_j, I_a^b)$ (полунепрерывность снизу TV).*

(c) *Если $f \in \mathcal{F}$, $x, y \in I_a^b$ и $x \leqslant y$, то имеют место неравенства:*

$$d(f(y), f(x)) \leqslant \sum_{0\neq\alpha\leqslant1} \mathrm{md}_{|\alpha|}(f_\alpha^x, I_x^y\lfloor\alpha) \leqslant \mathrm{TV}(f, I_x^y);$$

$$\sum_{0\neq\alpha\leqslant\gamma} V_{|\alpha|}(f_\alpha^x, I_x^y\lfloor\alpha) = \mathrm{TV}(f, I_x^{x+\gamma(y-x)}) \leqslant \mathrm{TV}(f, I_a^{x+\gamma(y-x)}) - \mathrm{TV}(f, I_a^x)$$

для всех $0 \neq \gamma \leqslant 1$.

(d) *Если $f \in \mathrm{BV}(I_a^b; M)$, то функция $\nu : I_a^b \to \mathbb{R}$, заданная правилом $\nu(x) = \mathrm{TV}(f, I_a^x)$ для всех $x \in I_a^b$, является полностью монотонной, т. е. $(-1)^{|\alpha|}\sum_{0\leqslant\theta\leqslant\alpha}(-1)^{|\theta|}\nu(x+\theta(y-x)) \geqslant 0$ для всех $x, y \in I_a^b$, $x \leqslant y$, и $0 \neq \alpha \leqslant 1$, причем $\mathrm{TV}(\nu, I_a^b) = \mathrm{TV}(f, I_a^b)$.*

Отметим, что при $M = \mathbb{R}$ лемма 1 и вторые неравенства в леммах 2 и 3(c) установлены в [7], первые неравенства в леммах 2 и 3(c) и лемма 3(d) получены в [13], а свойства (a) и (b) леммы 3 известны из [11].

2. ТЕОРЕМА ТИПА ХЕЛЛИ

Скажем, что последовательность $\{f_j\} \subset \mathcal{F}$ поточечно относительно компактна (на I_a^b), если для любого $x \in I_a^b$ замыкание в M последовательности $\{f_j(x)\}$ компактно. Имеет место следующий принцип выбора типа Хелли для отображений n переменных со значениями в метрической полугруппе $(M, d, +)$.

Т е о р е м а 1. *Если последовательность отображений $\{f_j\} \subset \mathcal{F}$ поточечно относительно компактна на I_a^b и удовлетворяет условию*

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{TV}(f_j, I_a^b) < \infty, \tag{2}$$

то $\{f_j\}$ содержит подпоследовательность, которая поточечно на I_a^b сходится при $j \to \infty$ к некоторому отображению $f \in \mathrm{BV}(I_a^b; M)$.

Эта теорема обобщает результаты работ [4] ($n = 1$ и M — метрическое пространство), [11, 12] ($n = 2$ и $M = \mathbb{R}$), [13] ($n \in \mathbb{N}$ и $M = \mathbb{R}$) и [2] ($n = 2$ и M — метрическая полугруппа).

3. СЛАБЫЙ ПОТОЧЕЧНЫЙ ПРИНЦИП ВЫБОРА

В этом разделе приводится вариант теоремы 1, связанный со слабой поточечной содимостью, для случая, когда значения отображений лежат в рефлексивном сепарабельном банаховом пространстве.

Пусть $(M, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и M^* — его сопряженное, т.е. пространство всех непрерывных линейных функционалов на M. Хорошо известно, что M^* — банахово пространство относительно нормы $\|u^*\|^* = \sup\{|u^*(u)| : u \in M$ и $\|u\| \leqslant 1\}$, $u^* \in M^*$. Напомним, что последовательность $\{u_j\}$ элементов из M сходится слабо в M к элементу $u \in M$ (коротко $u_j \xrightarrow{w} u$

в M), если $u^*(u_j) \to u^*(u)$ в $\mathbb{K}$ при $j \to \infty$ для всех $u^* \in M^*$; кроме того, в этом случае имеет место неравенство $\|u\| \leqslant \liminf_{j\to\infty} \|u_j\|$.

Поскольку линейное нормированное пространство $(M, \|\cdot\|)$ есть метрическая полугруппа, то понятия n-ой вариации Витали, $|\alpha|$-ой вариации для $0 \neq \alpha \leqslant 1$ и полной вариации отображения $f : I_a^b \to M$ вводятся как выше относительно индуцированной метрики $d(u, v) = \|u-v\|$, $u, v \in M$.

Теорема 2. *Пусть $(M, \|\cdot\|)$ — рефлексивное сепарабельное банахово пространство, сопряженное пространство $(M^*, \|\cdot\|^*)$ к которому сепарабельно, и пусть $\{f_j\} \subset \mathcal{F}$ — последовательность отображений. Если для $\{f_j\}$ выполняется условие* (2) *и*

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \|f_j(x)\| < \infty \quad \textit{для всех} \quad x \in I_a^b,$$

то найдутся подпоследовательность в $\{f_j\}$, обозначаемая как исходная последовательность через $\{f_j\}$, и отображение $f \in \mathrm{BV}(I_a^b; M)$ такие, что $f_j(x) \xrightarrow{w} f(x)$ в M при $j \to \infty$ для всех $x \in I_a^b$.

Эта теорема является распространением на отображения многих переменных слабого принципа выбора из [3, Глава 1, теорема 3.5] для отображений ограниченной по Жордану вариации одной переменной.

На примерах можно показать, что все условия теорем 1 и 2 являются существенными для их справедливости.

Работа В. В. Чистякова поддержана грантом Государственного университета – Высшая школа экономики по приоритетной тематике “Исследования пространств функций”, проект № 09-08-0012.

Чистяков Вячеслав Васильевич, Третьяченко Юлия Владимировна:

Государственный университет Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Ambrosio L.* // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. 1990. V. 17. P. 439–478.

[2] *Balcerzak M., Belov S. A., Chistyakov V. V.* // Bull. Austral. Math. Soc. 2002. V. 66. 2. P. 245–257.

[3] *Barbu V., Precupanu Th.* Convexity and Optimization in Banach Spaces. Second ed., Reidel: Dordrecht, 1986. 350 pp.

[4] *Чистяков В. В.* // Матем. сб. 1998. Т. 189. 5. С. 153–176.

[5] *Чистяков В. В.* // ДАН. 2003. Т. 393. 6. С. 757–761.

[6] *Chistyakov V. V.* // J. Appl. Anal. 2004. V. 10. 1. P. 1–82.

[7] *Chistyakov V. V.* // Nonlinear Anal. 2005. V. 62. 3. P. 559–578 (Part I); V. 63. 1. P. 1–22 (Part II).

[8] *Chistyakov V. V., Maniscalco C., Tretyachenko Yu. V.* // In: Topics in Classical Analysis and Applications in Honor of Daniel Waterman. Singapore: World Scientific. 2008. P. 45–72.

[9] *Джусти Э.* Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации. М.: Мир, 1989. 240 с.

[10] *Helly E.* // Sitzungsber. Naturwiss. Kl. Kaiserlichen Akad. Wiss. Wien. 1912. V. 121. P. 265–297.

[11] *Hildebrandt T. H.* Introduction to the Theory of Integration. New York and London: Academic Press, 1963. 385 c.

[12] *Idczak D., Walczak S.* // Optimization. 1994. V. 30. P. 331–343.

[13] *Леонов А. С.* // Матем. заметки. 1998. Т. 63. 1. С. 69–80.

[14] *Надирашвили Н. С.* // Вестник МГУ, Сер. I, Мат., Мех. 1975. Вып. 3. С. 3–10.

[15] *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 3-е изд., 1974. 480 с.

УДК 517.98

В. В. Чистяков, Ю. В. Третьяченко

Принципы выбора для отображений нескольких переменных

Показано, что поточечно относительно компактная последовательность отображений из n-мерного прямоугольника в метрическую полугруппу, полные вариации в смысле Витали, Харди и Краузе которых равномерно ограничены, содержит поточечно сходящуюся подпоследовательность. Приведен вариант этого результата для отображений со значениями в рефлексивном сепарабельном банаховом пространстве относительно слабой поточечной сходимости отображений.

UDC 517.98

V. V. Chistyakov, Yu. V. Tretyachenko

Selection principles for maps of several variables

We show that a pointwise precompact sequence of maps from the n-dimensional rectangle into a metric semigroup, whose total variations in the sense of Vitali, Hardy and Krause are uniformly bounded, contains a pointwise convergent subsequence. We present a variant of this result for maps with values in a reflexive separable Banach space with respect to the weak pointwise convergence of maps.