

Теория пределов: упражнения и примеры
Методическое пособие для факультетов менеджмента,
политологии и социологии

П.А.Панов

Государственный Университет Высшая школа экономики

Январь 2010

1 Что такое предел последовательности?

Рассмотрим последовательность чисел:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

Член последовательности с номером k определяется по формуле $a_k = \frac{1}{k}$

Никакой член этой последовательности не равен нулю. Однако, чем больше номер члена последовательности, тем ближе сам член последовательности к нулю: $a_{100} = 0.01$, $a_{150} \approx 0.00667$, $a_{100000} = 0.00001$

В этом случае мы говорим, что предел последовательности равен нулю. Мы пока не дали строгое определение предела, только обсудили его смысл.

1.1 Упражнение Пределы следующих последовательностей равны нулю. Вычислите (приблизительно) по формуле члены последовательности с номерами 2, 5, 10, 20.

1. $b_n = \frac{1}{n^2}$

2. $c_n = \frac{1}{2^n}$

3. $d_n = (-3)^{-2n}$

Предел последовательности, конечно, не обязательно должен быть равен нулю. Скажем, если мы рассмотрим последовательность $a_k = \frac{4k+1}{2k-5}$, то с ростом k член последовательности a_k будет всё ближе и ближе к 2.

Действительно, $a_{100} = \frac{401}{195} = 2\frac{11}{195}$, $a_{150} = \frac{4 \times 150 + 1}{2 \times 150 - 5} = 2\frac{11}{295}$, $a_{100000} = \frac{4 \times 100000 + 1}{2 \times 100000 - 5} = 2\frac{11}{199995}$

Однако никакой член последовательности не равен именно двум.

Для предела последовательности есть специальное обозначение $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 2$. Это выражение читается "Предел последовательности a_k при стремлении k к бесконечности равен двум".

1.2 Упражнение Последовательность b_n определяется формулой $b_n = \frac{6n-2}{7-3n}$. Предел этой последовательности равен -2 , $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -2$. Найдите члены последовательности с номерами 2, 5, 10, 20.

1.3 Упражнение Последовательность c_n определяется формулой $c_n = \frac{n^2}{n^2+n+1}$. Предел этой последовательности равен 1, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$. Найти члены последовательности с номерами 2, 5, 10, 20.

1.4 Упражнение Последовательность d_n определяется формулой $d_n = \frac{n+(-1)^n \cdot 10}{2n}$. Предел этой последовательности равен $\frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \frac{1}{2}$. Найти члены последовательности с номерами 2, 5, 10, 20.

1.5 Упражнение Последовательность e_n определяется формулой $e_n = \frac{\sin(\frac{\pi \cdot n}{2})}{n}$. Предел этой последовательности равен 0, $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 0$. Найти члены последовательности с номерами 11, 12, 13, 14.

Заметим, что, в предпоследнем примере половина членов последовательности больше предельного значения, а половина - меньше, но для нас важно лишь то, что постепенно и те и другие члены приближаются к $\frac{1}{2}$. В последнем же примере часть членов равна предельному значению - в этом тоже нет никакого противоречия, сами члены могут быть какими угодно, но постепенно они должны становиться все ближе и ближе к своему пределу.

Дадим строгое определение предела.

Если для последовательности a_n существует такое число a , что для любого сколь угодно малого числа ε существует такое число N , что для любого номера $n > N$ будет выполняться условие $|a_n - a| < \varepsilon$, то число a является пределом последовательности a_n .

Почему же определение такое сложное? И что оно значит? Как мы уже обсудили, все члены последовательности постепенно должны становиться все ближе и ближе к своему пределу. Как задать это условие? Мы должны формально записать, что начиная с некоторого момента все члены будут очень близки к своему пределу, то есть $|a_n - a|$ будет очень маленьким, причем с ростом n должен становиться все меньше и меньше. Для этого в определении предела и сказано "для любого сколь угодно

малого числа ε ... будет выполняться условие $|a_n - a| < \varepsilon$. Но нам не требуется, чтобы все члены последовательности были очень близки к пределу, это условие должно выполняться с некоторого момента, поэтому мы и говорим "существует такое число N , что для любого номера $n > N$ будет выполняться условие $|a_n - a| < \varepsilon$ "

1.6 Упражнение Для последовательности $b_n = \frac{6n-2}{7-3n}$ найти такое число N , что для любого номера $n > N$ все члены будут отличаться от предела не более чем на $0,1$, не более чем на $0,01$.

С этой последовательностью мы уже сталкивались и знаем, что ее предел b равен -2 . Найдем для произвольного n , чему равна разность $|b_n - b|$:

$$|b_n - b| = \left| \frac{6n-2}{7-3n} - (-2) \right| = \left| \frac{6n-2}{7-3n} + 2 \right| = \left| \frac{6n-2+14-6n}{7-3n} \right| = \left| \frac{12}{7-3n} \right|$$

Начиная с какого момента получившееся число будет меньше чем $0,1$? Подставим $N = 10$, получим: $|b_{10} - b| = \left| \frac{12}{7-3 \times 10} \right| = \left| \frac{12}{7-30} \right| = \frac{12}{23} > 0,1$. Не подходит. Возьмем сотый член последовательности, b_{100} . Итак, $N = 100$, значит $|b_N - b| = \left| \frac{12}{7-300} \right| = \frac{12}{293} \approx 0,040956 < 0,1$. Подходит, причем все значения больше 100 тоже подойдут. То есть мы нашли нужное число. Давайте рассмотрим $N = 90$: $\left| \frac{12}{7-3 \cdot 90} \right| = \frac{12}{263} = 0,045627 < 0,1$ - это значение нам тоже подходит! Будет ли ошибкой в ответе указать $N = 100$? Дело в том, что в определении и в условии задачи речь не идет о минимально возможном N , так что мы можем указывать любое подходящее число, так что ошибочным такой ответ не будет. С другой стороны, перебирать все возможные числа - неправильно. Мы можем потратить на это очень много времени. Поэтому рассмотрим другой способ - решим соответствующее неравенство:

$$|b_n - b| < 0,1$$

$$\left| \frac{12}{7-3n} \right| < 0,1$$

$$-0,1 < \frac{12}{7-3n} < 0,1 \text{ при } n > 3 \text{ получаем что } 7-3n < 0, \text{ поэтому}$$

$$-0,1(7-3n) > 12 > 0,1(7-3n) \text{ домножим на } 10$$

$$-(7-3n) > 120 > (7-3n), \text{ то есть должны одновременно выполняться два неравен-$$

ства: $3n > 127$ и $3n > -113$. Решением этих неравенств является $n > \frac{127}{3} \Rightarrow n > 42\frac{1}{3}$.

Отсюда получаем, что при любом целом $n > 42$ член последовательности b_n будет отличаться от -2 не более чем на $0,1$, а при меньших номерах это равенство выполняться не будет.

Решим эту задачу для $\varepsilon = 0,01$ - решение будет абсолютно аналогичным:

$$|b_n - b| < 0,01$$

$$\left| \frac{12}{7-3n} \right| < 0,01$$

$-0,01 < \frac{12}{7-3n} < 0,01$ при $n > 3$ получаем что $7 - 3n < 0$, поэтому

$$-0,01(7 - 3n) > 12 > 0,01(7 - 3n) \text{ домножим на } 100$$

$-(7 - 3n) > 1200 > (7 - 3n)$, то есть должны одновременно выполняться два неравенства: $3n > 1207$ и $3n > -1193$. Решением этих неравенств является $n > \frac{1207}{3} \Rightarrow n > 402\frac{1}{3}$. Отсюда получаем, что при любом целом $n > 402$ член последовательности b_n будет отличаться от -2 не более чем на $0,01$, а при меньших номерах это равенство выполняться не будет.

Но еще раз отметим, что мы не обязаны находить минимально возможное N .

1.7 Пример Для последовательности $e_n = \frac{\sin(\frac{\pi \cdot n}{2})}{n}$ найти такое число N , что для любого номера $n > N$ все члены будут отличаться от предела не более чем на $0,1$. Предел этой последовательности равен нулю. Начало решения будем таким же как и в предыдущий раз: решим неравенство: $|e_n - 0| < 0,1$, т.е. $|e_n| < 0,1$ Подставляя формулу для e_n получаем $\left| \frac{\sin(\frac{\pi \cdot n}{2})}{n} \right| < 0,1$. Выражение $\sin(\frac{\pi \cdot n}{2})$ принимает только три значения: $1, 0, -1$. Следовательно, при $N = 10$ для любого $n > N$ все члены последовательности будут отличаться от 0 меньше чем на $0,1$.

1.8 Упражнение Для последовательности $d_n = \frac{\sin(\frac{\pi \cdot n}{2})}{n}$ найти такое число N , что для любого номера $n > N$ все члены будут отличаться от предела не более чем на $0,01$.

1.9 Упражнение Для последовательности $a_n = \frac{3-4n}{5+8n}$ найти такое число N , что для

любого номера $n > N$ все члены будут отличаться от предела не более чем на $0,2$, не более чем на $0,015$.

1.10 Упражнение Для последовательности $a_n = \frac{n^2+4}{n^2}$ определить, какое из чисел 5 , 1 или $1/2$ будет являться пределом и найти такое число N , что для любого номера $n > N$ все члены будут отличаться от предела не более чем на $0,1$, не более чем на $0,01$.

1.11 Упражнение Для последовательности $a_n = \frac{n^2}{n^2+n}$ определить, какое из чисел $1/2$, $2/3$ или 1 будет являться пределом и найти такое число N , что для любого номера $n > N$ все члены будут отличаться от предела не более чем на $0,1$, не более чем на $0,01$.

Рассмотрим последовательность $a_n = n$. Члены этой последовательности не становятся всё ближе и ближе к какому-то определённом числу, но каждый следующий член последовательности больше предыдущего. Особенно важно то, что члены последовательности с большими номерами не бывают маленькими, и рост членов последовательности ничем не ограничен. В таком случае говорят, что предел последовательности равен плюс бесконечности. Более точно, предел равен плюс бесконечности в том случае, когда известно, что, начиная с некоторого момента, все члены последовательности станут больше любого наперед заданного числа. Т.е. ставится не только условие, что в последовательности встречаются все большие и большие значения, но еще и условие, что все члены последовательности в конце концов окажутся далеко от нуля.

1.12 Пример Покажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$. Действительно, какое число C мы не назовём, можно найти такое N , что для любого $n > N$ будет верно $n^2 > C$. Действительно, для любого $C < 1$ можно брать $N = 1$, для $C > 1$ достаточно взять $N = \lceil \sqrt{C} \rceil$, целую часть числа \sqrt{C} - наибольшее целое число, не превосходящее \sqrt{C} .

Рассмотрим последовательность $a_n = -n$. Члены этой последовательности становятся всё меньше и меньше, не "накапливаясь" ни к какому числу. Члены последовательности с большими номерами не бывают большими, уменьшение членов последовательности ничем не ограничено. Предел этой последовательности равен минус бесконечности, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$. Также, как и в предыдущем определении, необходимо поставить условие, что члены последовательности постепенно отдаляются от нуля в отрицательном направлении, и начиная с некоторого момента станут дальше, чем любое наперед заданное число. Формально мы получаем следующее: если для любого сколь угодно большого числа существует такое число N , что для любого номера $n > N$ будет выполняться условие $a_n < -$, то пределом последовательности a_n является $-\infty$.

1.13 Пример Покажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n + 10) = -\infty$. Действительно, какое число > 0 мы не назовём, можно найти такое N , что для любого $n > N$ будет верно $-n + 10 < -M$. Для любого M можно взять $N = \lceil M \rceil + 10$, тогда для $n > N$ будет выполняться нужное неравенство.

1.14 Упражнение Дать определение того, что пределом последовательности является $+\infty$

Осталось рассмотреть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Такой предел возникает в том случае, если мы знаем, что члены последовательности становятся все больше и больше по абсолютной величине, и в некоторый момент станут больше любого наперед заданного числа.

1.15 Пример Покажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot 2n + n = \infty$. Действительно, какое число > 0 мы не назовём, можно найти такое N , что для любого $n > N$ будет верно $|(-1)^n \cdot 2n + n| > M$. Для любого M можно взять $N = \lceil M \rceil + 1$, тогда для любого четного $n > N$ будет выполняться неравенство $|a_n| = 3n > 3N > 3 > M$, а для нечетного $|a_n| = | -n | > N >$

Последний вопрос, который необходимо обсудить в этой части - это ситуация, когда у последовательности нет предела. Если исходить из определений, то что значит, что предел не равен бесконечности? Это значит, что существует такое число $\delta > 0$, что всегда будут встречаться в последовательности такие члены, которые меньше чем это число. А что значит, что предел не равен никакому числу? Это значит, что какое число мы бы не взяли, существует такое $\varepsilon > 0$, что всегда будут встречаться такие члены последовательности, для которых $|a_n - a| > \varepsilon$. Другими словами, члены последовательности не начинают концентрироваться ни у одного числа. Рассмотрим простой пример: $a_n = \sin n$. Если мы вспомним график синуса то станет понятно, что так как ее члены - это точки на синусоиде, то в этой последовательности всегда будут встречаться числа из всего промежутка от -1 до 1. Однако строгого доказательства этого факта мы приводить не станем. Последовательность $a_n = n \cdot \sin n$ также не имеет предела - хоть в ней и встречаются сколь угодно большие числа, в ней всегда будут встречаться и числа, меньшие, например, 1.

1.16 Упражнение Найти предел последовательности $a_n = n \cdot \cos(2\pi n)$.

1.17 Упражнение Найти предел последовательности $a_n = n \cdot \cos(2\pi n + \pi)$.

1.18 Упражнение Найти предел последовательности $a_n = n \cdot \cos(\pi n)$.

1.19 Упражнение Найти предел последовательности $a_n = n \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$.

2 Что такое предел функции?

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{(x-1)\pi}{\sin \pi x}$. Эта функция определена не везде: действительно, выражение в знаменателе $\sin \pi x$ иногда обращается в ноль, а деление на ноль не определено. Например, в точке $x = 1$ знаменатель дроби равен нулю: $\sin \pi x = \sin \pi = 0$. Значит, значение функции в точке $x = 1$ вычислить невозможно.

Однако, что-то узнать о функции в этой точке можно. Вычислим значение функции

$f(x) = \frac{(x-1)\pi}{\sin \pi x}$ в точках, близких к $x = 1$:

$x = 0.8$	$x = 0.9$	$x = 0.95$	$x = 0.97$	$x = 0.99$	$x = 0.99$
$f(x) = \frac{(0.8-1)\pi}{\sin 0.8\pi} \approx -1.069$	$f(x) = \frac{(0.9-1)\pi}{\sin 0.9\pi} \approx -1.0166$	-1.0041	-1.0015	-1.000165	-1.0000165
$x = 1.2$	$x = 1.1$	$x = 1.05$	$x = 1.03$	$x = 1.01$	$x = 1.00$
$f(x) = \frac{(1.2-1)\pi}{\sin 1.2\pi} \approx -1.069$	$f(x) = \frac{(1.1-1)\pi}{\sin 1.1\pi} \approx -1.0166$	-1.0041	-1.0015	-1.000165	-1.0000165

Мы видим, что чем ближе x к единице, тем значение функции ближе к -1 . В

этом случае говорят, что предел функции $f(x)$ при стремлении x к единице равен -1 . Это выражение записывается так: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$

Позже мы обсудим различия в пределах последовательностей и функций, а пока заметим, что понятие предела функции уже изучалось всеми в школе. Чтобы убедиться в этом, обсудим следующую запись: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$. Что она означает? Проще всего это понять при помощи графика: функция с ростом x (как раз при $x \rightarrow +\infty$) становится все ближе и ближе к некоторому числу a . Посмотрим на график $f(x) = 3 + \frac{\sin x}{x}$:

Мы видим что функция постепенно приближается к прямой, которая называется асимптотой, и именно в таком виде мы с этим и встречались ранее - если у функции есть горизонтальная асимптота, то это значит, что у нее есть предел при $x \rightarrow +\infty$. Отметим здесь важный момент - да, функция может пересекать асимптоту! И в школе вам не говорили противоположного. Существуют функции, которые ее не пересекают - например гипербола. Но это не означает, что ни одна функция не может ее пересекать.

Заполним табличку со значениями этой функции -

$x =$	10	11	...	30	31	32	...	100	101	102	...
$f(x) = 3 + \frac{\sin x}{x}$	2.946	2.909		2.967	2.987	3.017		2.995	3.004	3.01	

По этим значениям видно, что хотя и при переходе от одного числа к другому функция может и удалиться от своего предела, в целом, с ростом аргумента, значения приближаются к пределу. Запишем определение: если для функции существует такое

число ε , что для любого сколь угодно малого числа ε существует такое число M , что при любом $x > M$ будет выполняться неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$, то называется пределом функции при стремлении x к бесконечности.

2.1 Упражнение Записать определение предела при $x \rightarrow -\infty$

2.2 Упражнение Найти предел $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ при x стремящемся к 1

Посмотрим, что происходит с функцией при $x = 1$. Мы получаем, что и числитель и знаменатель одновременно равны 0. То есть функция не определена в этой точке.

Заполним таблицу со значениями функции при $x \rightarrow 1$:

$x = 0.8$	$x = 0.9$	$x = 0.95$	$x = 0.97$	$x = 0.99$	$x = 0.995$	$x = 0.999$
$f(x) = \frac{0.8^2+0.8-2}{0.8^2+2 \cdot 0.8-3} \approx 0.737$	$f(x) \approx 0.744$	0.747	0.748	0.749	0.74969	0.74993
$x = 1.2$	$x = 1.1$	$x = 1.05$	$x = 1.03$	$x = 1.01$	$x = 1.005$	$x = 1.001$
$f(x) = \frac{1.2^2+1.2-2}{1.2^2+2 \cdot 1.2-3} \approx 0.762$	$f(x) \approx 0.756$	0.753	0.752	0.751	0.7503	0.75006

По таблице видно, что значения функции приближаются к числу 0.75. И хотя мы и не можем по этим значениям ДОКАЗАТЬ, что предел равен именно этому числу, такой вывод был бы самым разумным. И действительно, предел равен 0.75. Но можно ли решить этот пример проще - без таблиц? И желательно так, чтобы это решение признали правильным на контрольной? Для этого давайте изучим функцию.

Мы имеем отношение двух многочленов - в числителе и знаменателе стоят квадратные трехчлены. Разложим их на множители: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)}$, и теперь видно, почему у нас возникли проблемы - в знаменателе стоит множитель $(x-1)$, который равен нулю в предельной точке. Но этот же самый множитель стоит и в числителе, а так как мы рассматриваем точки, лежащие рядом с 1, но не равные 1, то можно сократить дробь на этот множитель (он не равен нулю), а затем снова подставить в функцию предельную точку: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)}{(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+2}{1+3} = 0.75$.

Мы решили этот пример. И сразу же два замечания: ситуация, с которой мы столкнулись, называется неопределенностью вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Дело в том, что получив и в числителе и в знаменателе 0, мы никогда заранее не можем сказать, чему будет равен

предел и будет ли он вообще. Второе замечание - прием, который мы использовали, всегда можно использовать для нахождения предела отношения многочленов вида $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \right]$. Если $f(a) = 0$, то этот многочлен всегда можно разложить на множители, один из которых равен $(x - a)$, а так как нулю равны оба многочлена, то мы сможем сократить дробь и изучать точно также новую функцию.

2.3 Упражнение $f(x) = \frac{4x^3 - 2x^2 + x - 2}{2x^3 + 6x^2 - 3x}$.

А если значения функции в интересующей нас точке определено, имеет ли смысл вычислять предел функции в этой точке? Для тех функций, которые встречались в школьной программе этот предел совпадает со значением функции в точке.. Но это верно совершенно не для любых функций. Например, целая часть.

3 Когда возникают сложности?

Мы научились находить пределы суммы, произведения, отношения функций и последовательностей. Однако, есть интересные ситуации, когда пользоваться "арифметикой пределов" не удаётся. Например, мы уже видели, что предел функции $f(x) = \frac{(x-1)\pi}{\sin \pi x}$ при стремлении x к единице равен -1 . Почему мы не воспользовались здесь теоремой об отношении пределов, ведь найти пределы функций $(x - 1)\pi$ и $\sin \pi x$ при стремлении x к единице просто? Дело в том, что, как мы уже говорили, знаменатель $\sin \pi x$ стремится к нулю при стремлении x к единице, а значит, и теорема об отношении пределов не применима. Бывает же, что наоборот, и числитель, и знаменатель дроби стремиться к бесконечности. Эти случаи легко сводятся один к другому. В некоторых случаях эту сложность можно при помощи небольшой хитрости

3.1 Пример Найдём $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + x - 2}{2x^3 + 6x^2 - 3x}$. Мы не можем воспользоваться теоремой о частном пределов, т.к. при стремлении x к бесконечности и числитель и знаменатель

стремится к бесконечности. Мы могли бы "перевернуть" дробь, свести нахождение предела к такой задаче: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + x - 2}{2x^3 + 6x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2x^3 + 6x^2 - 3x}}{\frac{1}{4x^3 - 2x^2 + x - 2}}$. Сейчас и числитель, и знаменатель дроби имеют предел при стремлении x к бесконечности, но эти пределы равны нулю, и воспользоваться теоремой о частном пределов опять не удаётся. Сделаем другое преобразование дроби. Заметим, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + x - 2}{2x^3 + 6x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^3}}{\frac{2x^3 + 6x^2 - 3x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3} - \frac{2}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3} + \frac{6x^2}{x^3} - \frac{3x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{2}{x} + \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^3}}{2 + \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2}}$. В этой дроби предел числителя и знаменателя легко ищется, а главное, предел знаменателя уже не равен нулю. (Дорешать аккуратно). Почему мы поделили числитель и знаменатель дроби именно на x^3 ? Дело в том, что x^3 - это самая старшая степень, встречающаяся в знаменателе, выполнив такое деление мы обеспечили себе ненулевой предел в знаменателе.

При помощи этого приёма решаются и более сложные задачи.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1) \sin x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+8}{\sqrt{x^2+6x-5}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-5x+8}{\sqrt{x^2+3x-2} + \sqrt{x^4+5x^3-4}}$$

А чему равен предел суммы двух последовательностей или функций, если одна из них стремится к плюс, а другая к минус бесконечности? Ответ может быть разным. В этом случае теоремы о сложении, умножении и делении пределов ничем не могут нам помочь. Однако и на этот случай есть небольшая хитрость: если слагаемые не сокращаются просто, как в случае $x - (x - 1)$, нужно попытаться удачно умножить и разделить выражение на что-то, что упростит выражение хотя бы в числителе.

3.2 Пример $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 3} - \sqrt{x^2 - 5x + 7})$ Здесь нам нужно найти предел разности двух бесконечно возрастающих последовательностей. Для того, чтобы выражение хоть немного упростилось, умножим и поделим выражение на сумму этих же корней и воспользуемся в числителе формулой разности квадратов.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 3} - \sqrt{x^2 - 5x + 7}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x + 3} - \sqrt{x^2 - 5x + 7})(\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 5x + 7})}{\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 5x + 7}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x + 3})^2 - (\sqrt{x^2 - 5x + 7})^2}{\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 5x + 7}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - 3x + 3) - (x^2 - 5x + 7)}{\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 5x + 7}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 3 - x^2 + 5x - 7}{\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 5x + 7}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-3x+3} + \sqrt{x^2-5x+7}}$$

такие пределы искать мы уже умеем. Поделим числитель и знаменатель на x

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-3x+3} + \sqrt{x^2-5x+7}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x-4}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-3x+3}}{x} + \frac{\sqrt{x^2-5x+7}}{x}} =$$

Аналогично решаются такие задачи и для последовательностей.

3.3 Пример

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n^2 - 3n + 5} - 2\sqrt{n^2 - 7x + 12} \right) \\ = & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{4n^2 - 3n + 5} - 2\sqrt{n^2 - 7x + 12} \right) \left(\sqrt{4n^2 - 3n + 5} + 2\sqrt{n^2 - 7x + 12} \right)}{\left(\sqrt{4n^2 - 3n + 5} + 2\sqrt{n^2 - 7x + 12} \right)} = \\ = & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n^2 - 3n + 5) - 4(n^2 - 7x + 12)}{\sqrt{4n^2 - 3n + 5} + 2\sqrt{n^2 - 7x + 12}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3n + 5 - 4n^2 + 28x - 48}{\sqrt{4n^2 - 3n + 5} + 2\sqrt{n^2 - 7x + 12}} = \\ = & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3n + 5 - 4n^2 + 28x - 48}{\sqrt{4n^2 - 3n + 5} + 2\sqrt{n^2 - 7x + 12}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{25n - 43}{\sqrt{4n^2 - 3n + 5} + 2\sqrt{n^2 - 7x + 12}} = \\ = & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{25n-43}{n}}{\frac{\sqrt{4n^2-3n+5}}{n} + \frac{2\sqrt{n^2-7x+12}}{n}} = \frac{25}{4} \end{aligned}$$

3.4 Упражнение Найдите предел функции $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x - 7} - \sqrt{x^2 - 7x + 8})$

3.5 Упражнение Найдите предел функции $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 - x + 3} - 3\sqrt{x^2 - 6})$

3.6 Упражнение Найдите предел функции $\lim_{x \rightarrow \infty} (2\sqrt{x^2 - 7x + 4} - \sqrt{4x^2 - 6x + 5})$

3.7 Упражнение Найдите предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 5n + 3} - \sqrt{n^2 - 3n + 5})$$

3.8 Упражнение Найдите предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 6n - 4} - \sqrt{n^2 - 2n + 7})$$

3.9 Упражнение Найдите предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2\sqrt{n^2 - n + 5} - \sqrt{4n^2 - 2n + 3})$$

4 Замечательные пределы

Пока в вычислении пределов мы обходились несложными соображениями, сводящимися почти всегда к разным свойствам многочленов. Теперь посмотрим на более сложные выражения.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ около точки $x = 0$. В самой точке функция не определена, т.к. знаменатель обращается в ноль. Числитель дроби тоже равен нулю в точке ноль. Сравним числитель и знаменатель дроби около нуля.

x	1	0.5	0.1	0.05	0.01
$\sin x$	0.84147	0.47943	0.099833	0.049979	0.0099998
$x - \sin x$	0.15853	0.02057	0.000167	0.000021	0.0000002
$\frac{\sin x}{x}$					

Мы видим, что числитель и знаменатель стремятся к нулю, но разница между числителем и знаменателем стремится к нулю гораздо быстрее, числитель и знаменатель становятся очень-очень близки. Это значит, что отношение $\frac{\sin x}{x}$ становится всё ближе и ближе к единице, т.е. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Конечно, мы не доказали это равенство, и мы не будем его доказывать, просто проиллюстрировали равенство примерами. Доказательство этого замечательного равенства можно найти в любом стандартном учебнике математического анализа.

4.1 Пример $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{5} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{5}$

4.2 Пример $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} =$

4.3 Пример $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\sin x} =$

4.4 Пример $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3x^2}{\sin x} =$

4.5 Пример $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2+5x^2} =$

4.6 Пример $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2+2x^2-4} =$

4.7 Пример $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3x^2+2}{\sin x} =$

4.8 Пример $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{3x} =$

4.9 Пример Найдём предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{x}$. Если x стремится к нулю, то и $6x$ стремится к нулю. Это значит, что $\lim_{6x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{x} = \lim_{6x \rightarrow 0} \frac{6 \sin 6x}{6x} = 6$

4.10 Пример Найдём предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

4.11 Пример $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{2x}$

4.12 Пример $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 2x}$

4.13 Пример $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-x}{\sin 4x}$

4.14 Пример $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin x+x^2}$

4.15 Пример $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x-x^3}$

4.16 Пример Найдём предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 3x}$. Мы умеем искать предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x}$, воспользуемся этим умением для нахождения нашего предела: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} \cdot \frac{6x}{\sin 3x}$ Мы умножили и поделили дробь на $6x$...

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x}$ Дробь $\frac{e^x-1}{x}$ тоже не определена в нуле: и числитель и знаменатель равны нулю при $x = 0$. Если мы сравним числитель и знаменатель этой дроби, то, так же как и в случае с $\frac{\sin x}{x}$ увидим, что они очень близки, сближаются гораздо быстрее, чем каждое из значений стремится к нулю.

x	1	0.5	0.1	0.05	0.01
$e^x - 1$					
$(e^x - 1) - x$					
$\frac{e^x-1}{x}$					

Мы видим, что отношение $\frac{e^x-1}{x}$ становится всё ближе и ближе к единице, т.е. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$. Конечно, мы не доказали это равенство, и мы не будем его доказывать, просто проиллюстрировали равенство примерами. Доказательство этого замечательного равенства можно найти в любом стандартном учебнике математического анализа (например: Зорич, 1997).

4.17 Пример $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

4.18 Пример $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+x^2}{e^x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3+x)}{e^x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x-1} (3+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x-1} \times \lim_{x \rightarrow 0} (3+x) = 3$

4.19 Пример $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1+\sin x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x-1}{4x} + \frac{\sin x}{4x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{4x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{4x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Мы видим, что если какая-то величина y стремится к нулю, то отношение $\frac{e^y-1}{y}$ стремится к единице

4.20 Пример *Найдём предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{x}$. Если x стремится к нулю, то и $3x$ стремится к нулю. Это значит, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{3(e^{3x}-1)}{3x} = 3$*

4.21 Пример *Найдём предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$*

4.22 Пример $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{10x}-1}{5x}$

4.23 Пример $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} \frac{2x}{\sin 5x} = 1 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 5x} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$

4.24 Пример $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x}-1}{1-e^{2x}}$

4.25 Пример $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{3x}-1) \sin 2x}{(1-e^{4x}) \sin 5x}$

4.26 Пример $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{x-xe^{4x}}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ Используя замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ несложно получить следствие, тоже очень полезное для вычисления пределов. Итак, нас интересует предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$. Воспользуемся тригонометрической формулой для косинуса двойного угла:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

Пусть $2\alpha = x$, ведь именно $\cos x$ участвует в интересующем нас примере. Тогда $\alpha = \frac{x}{2}$. Итак, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 (\frac{x}{2})^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Итак, мы получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

4.27 Пример Найдём $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin x \sin 3x}$. Если $x \rightarrow 0$, то $2x \rightarrow 0$, т.е. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin x \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2} \times \frac{(2x)^2}{\sin x \sin 3x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{\sin x \sin 3x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \times 3x}{\sin x \sin 3x} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

4.28 Упражнение $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 1}{\sin x (e^x - 1)}$

4.29 Упражнение $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{\sin x (e^{2x} - 1)}$ Указание: $\cos 3x - \cos 2x = (\cos 3x - 1) - (\cos 2x - 1)$

4.30 Упражнение $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - e^{2x} \sin x}{1 - \cos 3x}$

4.31 Упражнение $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1)(e^{3x} - 1)}{1 - \cos 2x}$

4.32 Упражнение $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x (e^{3x} - 1)}{\cos 3x - 1}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$ Этот замечательный предел можно вычислить, используя равенство $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$. Пусть $\ln(x + 1) = y$. Тогда если $x = 0$, то и $y = \ln(0 + 1) = 0$, более того, если $x \rightarrow 0$, то и $y \rightarrow 0$. Если $\ln(x + 1) = y$, то $e^{\ln(x+1)} = e^y$, а значит $(x + 1) = e^y$ и $x = e^y - 1$.

Итак,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^y - 1}{y}} = 1$$

4.33 Пример $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x+1)}{\sin 3x}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$ Мы можем вычислить этот предел, а потом использовать его для любых положительных α , дробных, иррациональных, любых. Однако подробно мы разберём случаи с несколькими целыми α .

Пусть $\alpha = 1$. Тогда предел вычислить очень просто:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{x} = 1$$

Пусть $\alpha = 2$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2x+x^2-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2+x) = 2$$

Несложно провести вычисления и при $\alpha = 3$ и $\alpha = 4$, для этого нужно лишь воспользоваться формулами

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Итак,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+3x+3x^2+x^3-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (3+3x+x^2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^4 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+4x+6x^2+4x^3+x^4-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (4+6x+4x^2+x^3) = 4$$

Оказывается, аналогичная формула верна для любых положительных α :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Например, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{x} = \frac{1}{2}$

4.34 Пример $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[2]{1+3x} - \sqrt[3]{1+2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{2}} - (1+2x)^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+3x)^{\frac{1}{2}} - 1}{x} - \frac{(1+2x)^{\frac{1}{3}} - 1}{x} \right) =$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{2}} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{\frac{1}{3}} - 1}{x} = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

4.35 Упражнение $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[2]{1+4x} - \sqrt[3]{1+3x}}{2x}$

4.36 Упражнение $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+6x} - 1}{3x}$

4.37 Упражнение $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[2]{1+4x} - (1+x)^2}{2x}$

Сдвиг переменной Почти все пределы, которые мы искали, были при $x \rightarrow 0$. Конечно, в задачах встречаются и другие переменные, не стремящиеся к нулю, однако это не мешает использовать нам замечательные пределы: сдвиг переменной сводит задачу к уже решенным

4.38 Пример $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$ Пусть $y = x - \frac{\pi}{2}$, тогда если $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, то

$$y = x - \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0,$$

т.е. $y \rightarrow 0$. Если $y = x - \frac{\pi}{2}$ то $x = y + \frac{\pi}{2}$. Возвращаемся к поставленной задаче

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{\pi - 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin y}{\pi - 2y - \pi} = \frac{1}{2}$$

Здесь мы воспользовались формулой приведения $\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin y$

5 Другие типы неопределённости

Все пределы, которые мы искали раньше, относились к типам $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ или $(\infty - \infty)$, т.е. мы искали предел отношения двух величин, каждая из которых стремится к нулю или к бесконечности или искали разность двух величин, стремящихся к бесконечности. Конечно, среди задач о нахождении пределов, встречаются не только такие.

5.1 Пример Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Казалось бы, в чём тут сложность? $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$, единица в любой степени равна единице, значит $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1$. Однако это совершенно не так, для того, чтобы это увидеть, достаточно провести несколько численных экспериментов:

$$\begin{array}{ccccccc} x & 1 & 10 & 100 & 1000 & & \\ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x & 2 & \approx 2.5937 & \approx 2.705 & \approx 2.718 & & \end{array}$$

По численным данным можно предположить, что величина $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ сходится при $x \rightarrow \infty$ к некоторому числу, и это число совершенно не равно единице. Это действительно так.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2.718281828$$

Число e одна из замечательных мировых констант, величин, встречающихся неожиданным образом в самых разных областях знаний. Это число нельзя представить в виде конечной дроби, т.е. оно иррационально. Число e не может быть корнем никакого уравнения конечной степени с целыми коэффициентами: ни квадратного, ни кубического, ни даже уравнения сотой степени. Число e можно определять по-разному, у него много замечательных определений, и предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ одно из них. Однако, если мы считаем известным предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$, то предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ можно вычислить. (Обычно, при строгом изложении теории пределов эти пределы находят в обратном порядке). Мы будем пользоваться определением натурального логарифма: $a = e^{\ln a}$ и свойством $\ln [a^b] = b \ln a$. Итак:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

Пусть $y = \frac{1}{x}$. Тогда если $x \rightarrow \infty$, то $y \rightarrow 0$. Значит,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} e^{y \ln(1+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+y)}{y}} = e^{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y}} = e^1 = e$$

В последнем действии мы сделали ещё один нетривиальный ход. Почему, собственно, $\lim_{y \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+y)}{y}} = e^{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y}}$? Во все не всегда можно менять местами значок

предела и функцию, а только если функция непрерывная. Это и есть, в каком-то смысле, определение непрерывности функции в точке. Функция e^x непрерывна (это утверждение мы не доказывали, и для того, чтобы его доказать, нужно много возиться с пределами), с ней такой переход делать можно. А функция $f(x) = [x]$ - целая часть числа не непрерывна, с ней такой фокус бы не прошёл. Действительно, $\lim_{n \rightarrow \infty} [1 - \frac{1}{n}] = 0$, т.к. для любого n число $(1 - \frac{1}{n})$ не меньше нуля, но меньше единицы. Однако $[1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}] = 1$, т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

5.2 Пример Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{x}}$. Воспользуемся опять определением логарифма $a = e^{\ln a}$. Итак, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(1+2x)\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3 \ln(1+2x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln(1+2x)}{x}}$. Задача свелась к нахождению предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln(1+2x)}{x}$, найдём его. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln(1+2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \ln(1+2x)}{2x} = 6$, итак, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln(1+2x)}{x}} = e^6$

5.3 Пример Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{3}{e^{2x}-1}}$

5.4 Пример Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x \frac{1}{\sin 2x \sin 3x}$

5.5 Пример Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2x})^{4x}$

Литература

Зорич, В.А. (1997) Математический анализ, т. 1 и 2, Фазис: Москва.