

УДК 532.5

© 2009 г. О. Р. Козырев, С. Н. Резник, Н. А. Степанянц

**ДВИЖЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА
В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ
ПРИ ДЕЙСТВИИ РАДИАЦИОННОЙ СИЛЫ**

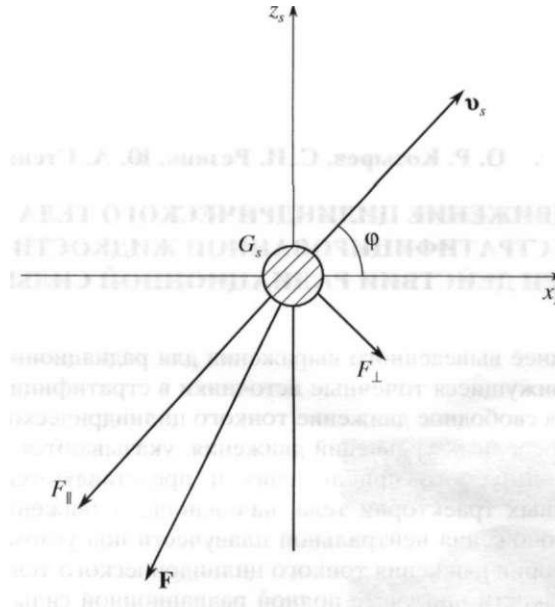
На основе ранее выведенного выражения для радиационной силы, действующей на движущиеся точечные источники в стратифицированной жидкости, изучается свободное движение тонкого цилиндрического тела. Приводится вывод основных уравнений движения, указываются границы применимости используемого приближения и представляются результаты расчетов типичных траекторий тела, начинающего движение с заданной скоростью из положения нейтральной плавучести под углом к горизонту. Расчеты траектории движения тонкого цилиндрического тела в стратифицированной жидкости при учете полной радиационной силы показывают, что влияние боковой компоненты этой силы значительно и приводит не только к количественным поправкам, но и к качественным эффектам (например, к усилению колебаний тела и изменению направления его движения). Полученные результаты имеют отношение как к движению твердых тел в жидкостях, так и к поступательному движению вихревых диполей в слабо стратифицированных средах.

Движение материальных объектов в сплошных средах, обладающих спектром собственных колебаний, вообще говоря, сопровождается излучением волн той или иной природы, что приводит к появлению дополнительных радиационных сил, действующих на источники этих волн. Эффекты такого рода подробно изучены в электродинамике при черенковском излучении электромагнитных волн быстро движущимися зарядами. Сходные физические явления возникают также в стратифицированных средах, например, в атмосфере или в океане, при излучении внутренних гравитационных волн движущимися телами. Однако излучение внутренних волн обладает рядом специфических особенностей из-за их анизотропной природы [1-3], связанной с действием силы тяжести.

При равномерном движении источника под произвольным углом к горизонту из-за асимметрии поля излучения относительно направления движения действующая на источник полная радиационная сила имеет кроме продольной компоненты (волнового сопротивления) также и поперечную компоненту, которая работы не совершает, но искривляет траекторию движения источника. Ранее был проведен расчет обеих этих компонент радиационной силы при заданной скорости источника [4]. Представляет интерес рассмотрение самосогласованной задачи об ускоренном либо замедленном движении тел в стратифицированной среде при действии полной радиационной силы наряду с силой тяжести.

Цель работы - исследование траекторий движения тела в такой среде в квазистационарном приближении.

1. Основные уравнения. Общие соотношения. Рассмотрим движение в идеальной несжимаемой стратифицированной жидкости тела цилиндрической формы радиуса a , ось которого перпендикулярна градиенту плотности. Будем для простоты полагать



Фиг. 1

жидкость безграничной и экспоненциально стратифицированной по плотности, так что частота Брента-Вайсяля постоянна:

$$N = \left(-\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right) = \text{const}$$

где g - ускорение силы тяжести, $\rho_j(z)$ - невозмущенная плотность жидкости. Пусть в начальный момент времени тело имеет скорость v_0 , направленную под углом ϕ_0 к горизонту. Исследуем дальнейшее движение тела.

Выберем неподвижную систему координат x, z , так, чтобы уровень $z = 0$ являлся уровнем нейтральной плавучести тела, т.е. на этом уровне $\rho_j(0) = \rho$, где ρ - плотность тела. При этом плотность жидкости $\rho_j(z) = \rho \exp(-N^2 z/g)$.

Уравнение движения тела имеет вид

$$(1.1)$$

где \dot{x} - скорость тела, G - площадь поперечного сечения тела, p - давление окружающей жидкости, S - поверхность тела, \mathbf{n} - единичный вектор нормали к поверхности тела.

Первое слагаемое в правой части уравнения (1.1) представляет собой силу, действующую на тело со стороны жидкости. Для ее вычисления перейдем в систему координат, движущуюся вместе с телом (фиг. 1). В этой неинерциальной системе координат жидкость на больших расстояниях от тела движется со скоростью $-M\dot{\phi}$, уравнение Эйлера принимает вид

$$\rho \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \dots \right) = \dots \quad (1.2)$$

Представим поле скорости жидкости в виде суммы скоростей невозмущенного потока и возмущения, вносимого телом в поток:

$$\mathbf{w} = -\mathbf{t}; +\mathbf{1}); -\mathbf{i}), = (C/, W), \quad x>' = (\mathbf{i}^*, w')$$

Будем моделировать погруженное тело массовым диполем, ориентированным вдоль направления обтекания, дипольный момент которого $\mathbf{1} \sim \mathbf{1})G_s$, где $G_s \sim a^2$. В частности, если движущееся тело - цилиндр радиуса a , то величина дипольного момента составляет $l = 2na^2v$. Такая модель, как известно [2], оправдана в случае, если число Фруда достаточно велико: $Fr = vJ(Na) > 1$.

Для нахождения компонент радиационной силы, возникающей из-за потери телом импульса на излучение внутренних волн, необходимо знать поле возмущений скорости. Предполагая, что амплитуда волн, излучаемых при обтекании тела, в дальней зоне ($z > X$, κ - длина волны) достаточно мала, воспользуемся линейным приближением для их описания. В рассматриваемой системе координат уравнения движения и неразрывности, описывающие такие возмущения в приближении Буссинеска, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp'}{dx} &= \dots, \quad \frac{Dw'}{Dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp'}{dz} - p'g = - \frac{Dp'}{Dt} - \frac{dpt}{dz} \quad \bullet \\ du' &= dw' \dots, \quad D \quad \text{Э} \quad \dots \quad \text{Э} \quad \dots \quad \text{Э} \end{aligned}$$

Здесь u' и w' - возмущения горизонтальной и вертикальной компонент скорости, p' и ρ' - возмущения давления и плотности, ρ^0 - плотность жидкости в месте нахождения тела, $m(x, z)$ — источник массы, моделирующий движущееся тело, который в рассматриваемом случае движущегося диполя равен $\delta(r) \delta(z) S'(r)$, где δ - дельта-функция Дирака, S' - ее производная, G_x и r_z - продольная и поперечная компоненты радиус-вектора источника относительно вектора его скорости. На фиг. 1 показано направление движения источника и компоненты действующей на него радиационной силы F_x и F_z , а также полная радиационная сила F . В виду линейности уравнений (1.3) очевидно, что все возмущения гидродинамических полей пропорциональны m .

Используя преобразование Фурье по горизонтальной и вертикальной координатам, можно привести систему (1.3) к одному уравнению для комплексной амплитуды возмущения вертикальной компоненты скорости w' (t, κ_x, κ_z):

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{D}{D} \frac{m}{k_x + k_z} = -i \frac{D}{D} \frac{m(k_x, k_z)}{k_x + k_z} \quad (1.4)$$

где $\frac{D}{D} = \frac{\partial}{\partial t} + ik_x U + ik_z W$ - приведенный выше оператор субстанциональной производной — в Фурье-представлении по пространственным координатам, $m(\kappa_x, \kappa_z)$ - Фурье-образ источника, κ_x, κ_z - компоненты волнового вектора \mathbf{k} .

Из уравнения (1.4) видно, что при выполнении условия $(k_x U + k_z W) w' < \dots$ (1.5)

It
его решение имеет вид
$$\frac{-ik_z m(k, k)}{k_x^2 + k_z^2} + \frac{k_z N}{k_x U(t) + k_z W(t)} + iE^{n2} \quad (1.6)$$

где ϵ - бесконечно малая величина, введенная в соответствии с правилом Лайтхилла [2] для устранения особенности в решении. Очевидно, что при выполнении условия (1.5) зависимость волнового поля от времени становится чисто параметрической. Границы применимости такого квазистационарного приближения будут оценены ниже.

Для вычисления силы, действующей на тело, используем прием, описанный ранее [5, 4]. Гидродинамическая сила, действующая на единицу длины цилиндрического тела в жидкости, определяется потоком импульса, уносимого на бесконечность внутренними волнами из выделенного объема G , содержащего тело; изменением импульса в единицу времени внутри этого объема, а также импульсом внешних сил - инерции и тяготения, действующих на жидкость в этом объеме. Введем нумерацию координат, так что индекс 1 соответствует x -координате, а индекс 2 - z -координате, тогда для j -й компоненты ($j=1,2$) этой силы можно записать выражение

$$F_j = - \int_G \rho \frac{d}{dt} (v_j) + \int_{ABCD} \Pi_{ij} n_i ds - \int_G \rho (g_j + S b_{ij}) ds \tag{1.7}$$

где Π_{ij} , $i=1,2$ - элементы тензора потока импульса, n_i - компоненты орта нормали к поверхности, ограничивающей выделенный цилиндрический объем G , $ABCD$ — прямоугольный контур, охватывающий сечение этого цилиндрического объема в перпендикулярной плоскости x, z , b_{ij} - символ Кронекера.

Если обтекаемое тело заменить источником массы $m(x, z)$, то из уравнения Эйлера при учете уравнения непрерывности для каждой i -й компоненты скорости имеем

$$\text{div}(\rho \mathbf{v}) + \rho \frac{dm}{dt} = 0 \tag{1.8}$$

Интегрируя уравнение (1.8) по площади поперечного сечения внутри выделенного объема жидкости G , за исключением площади сечения самого тела G_m и сравнивая результат с выражением (1.7), получим в приближении Буссинеска

$$\mathbf{F} = \rho \int_G \frac{d}{dt} (\mathbf{v}) + \rho \int_{G_m} \mathbf{v} dm + \rho \int_G \mathbf{g} + \rho \int_G \mathbf{S} \mathbf{b} dz$$

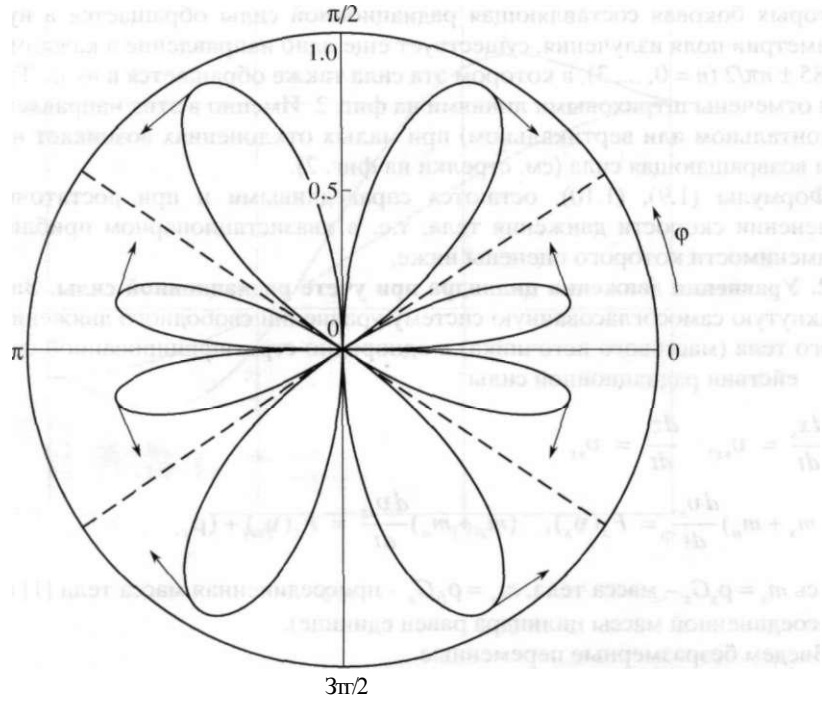
Первое слагаемое в правой части этого равенства представляет собой силу, связанную с присоединенной массой тела при нестационарном движении в жидкости [1, 3]. Она равна $-\rho \int_G \frac{d}{dt} (\mathbf{v})$, где c_m - коэффициент присоединенной массы. Второе слагаемое - архимедова сила плавучести, третье - искомая радиационная сила, обусловленная излучением волн телом.

Подробный расчет радиационной силы, действующей на равномерно движущийся источник в стратифицированной среде, был приведен ранее [4]. При этом зависимости полной радиационной силы и ее компонент от величины и направления скорости источника определяются формулами

$$\mathbf{F} = - \frac{\rho J}{4\pi v} \mathbf{T} - \mathbf{K}(\Phi) \tag{1.9}$$

Компоненты вектора \mathbf{R} таковы:

$$\ddot{\mathbf{R}} = - \frac{\rho J}{4\pi v} \frac{\sin \theta}{\cos^2(\theta - \theta_0)} \mathbf{a} - \frac{4}{3} \cos^2 \theta \mathbf{f} - \frac{2}{3} \dot{\mathbf{J}} \cos^2 \theta + 4 \dot{\mathbf{J}} \cos^4 \theta$$



Фиг. 2

$$\sin^3 \theta \cos^3 \theta d\theta = -2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \frac{d\theta}{\sin \theta} = -2 \cos^2 \theta \frac{d\theta}{\sin \theta}$$

$$\Phi(\phi) = \ln \frac{\cos(\phi + \pi/4)}{1 - 72 \cos(\phi + 7\pi/4)} \quad \Psi(\phi) = \ln \frac{1 - \cos \phi}{1 + \cos \phi}$$

Интегралы понимаются в смысле главного значения, а интегрирование ведется по всем возможным направлениям волнового вектора $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$

Отсюда для компонент вектора \mathbf{R} получаем

$$R_x = -\frac{1}{2}, \quad R_y(\phi) = -\frac{1}{2} \cos \phi \quad (1.10)$$

Отметим, что ранее [4] для $R_y(\phi)$ была приведена лишь квадратурная формула и численно построена соответствующая зависимость, здесь же удалось найти для нее аналитическое выражение. Как видно, величина волнового сопротивления, равная продольной компоненте радиационной силы, $F_{||} \sim R_x$ не зависит от направления движения, тогда как поперечная компонента радиационной силы $F_{\perp} \sim R_y$ - зависит. Угловая зависимость поперечной компоненты радиационной силы, нормированной на силу волнового сопротивления, изображена на фиг. 2 в полярных координатах. Стрелками указано направление действия боковой силы в соответствующих угловых секторах. Локальные экстремумы в первом квадранте имеют место при $\phi = 0.217$ и $\phi = 1.076$. Интересно отметить, что наряду с очевидными направлениями $\phi = 0, \pi$ и $\phi = \pi/2, 3\pi/2$, в

которых боковая составляющая радиационной силы обращается в нуль вследствие симметрии поля излучения, существует еще одно направление в каждом квадранте $\phi = 0.585 \pm n\pi/2$ ($n = 0, 3$), в котором эта сила также обращается в нуль. Такие направления отмечены штриховыми линиями на фиг. 2. Именно в этих направлениях (а не в горизонтальном или вертикальном) при малых отклонениях возникает направленная к ним возвращающая сила (см. стрелки на фиг. 2).

Формулы (1.9), (1.10), остаются справедливыми и при достаточно медленном изменении скорости движения тела, т.е. в квазистационарном приближении, рамки применимости которого оценены ниже.

2. **Уравнения движения цилиндра при учете радиационной силы.** Запишем теперь замкнутую самосогласованную систему уравнений свободного движения цилиндрического тела (массового источника) в однородно стратифицированной среде ($N = \text{const}$) при действии радиационной силы

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i, \quad \frac{dz_i}{dt} = v_z, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{K} + m_s \dot{\mathbf{v}} = F \mathbf{fr}_i, \quad \mathbf{K} + m_s \dot{\mathbf{v}} = \dots + (P, P^*) S G_s$$

Здесь $m_s = p_s G_s$ - масса тела, $m_s = pr_s G_s$ - присоединенная масса тела [1] (коэффициент присоединенной массы цилиндра равен единице).

Введем безразмерные переменные

$$\xi = x/a, \quad \zeta = z/a, \quad x = Nt, \quad \mathbf{u} = \lambda I(Na) \quad (2.2)$$

и запишем основную систему уравнений для модуля скорости тела u и угла ϕ , определяющего направление движения тела (фиг. 1):

$$\frac{d^2 \xi}{d\xi^2} = u \cos \phi, \quad \frac{d^2 \zeta}{d\xi^2} = \dots$$

$$\frac{du}{d\xi} = \dots + b(1 - e^{-\dots}) \sin \phi \quad (2.3)$$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \frac{-1}{u(1 + e^{-\dots})} \frac{-R_s(\phi) e^{-\dots}}{+ b(1 - e^{-\dots})} \cos \phi$$

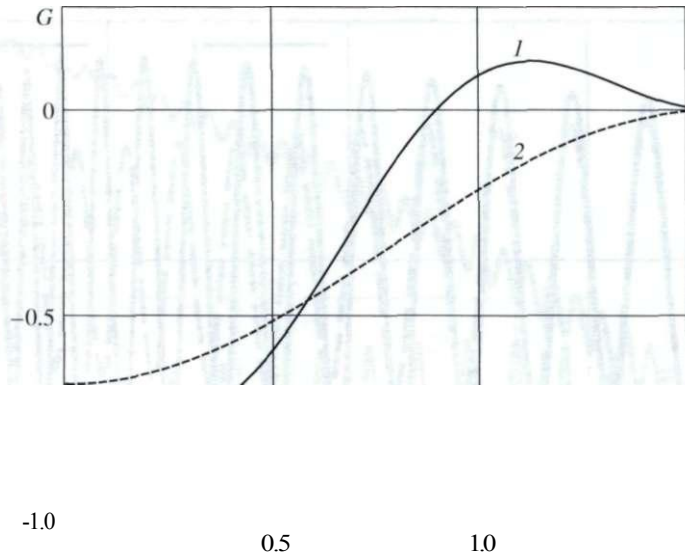
где $b = gl(Na)$ — безразмерный масштаб изменения невозмущенной плотности среды, а зависимость $R_s(\phi)$ выражается формулой (1.10).

Данную систему уравнений необходимо также дополнить начальными условиями

$$\xi(0) = \xi_0, \quad \zeta(0) = \zeta_0, \quad \dot{\xi}(0) = \dot{\xi}_0, \quad \phi(0) = \phi_0$$

причем начальное положение тела на оси x , определяемое безразмерной координатой ξ_0 , несущественно ввиду однородности задачи вдоль оси x , поэтому в дальнейшем можно положить $\xi_0 = 0$, что и будет сделано. Уравнение для горизонтальной координаты ξ тогда отщепляется, так что, найдя u и ϕ путем решения остальных уравнений системы (2.3), определяем затем ξ .

В такой форме определяющие уравнения содержат лишь один безразмерный параметр b , роль которого на самом деле тоже несущественна, ибо, как будет видно из дальнейшего, развиваемый здесь подход применим, когда этот параметр намного больше единицы. Это позволяет перейти к пределу $b \rightarrow \infty$ в системе (2.3), после чего



Фиг. 3

никаких параметров, кроме начальных данных, в ней не остается. Окончательно основная система уравнений при этом сводится к следующим трем уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \frac{1}{v} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{1}{3a} \left(\frac{C}{2} - \frac{P}{u} \right) \\ \frac{d\varphi}{dx} &= \frac{\Gamma}{u^2} \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.4)$$

У этой системы есть первый интеграл

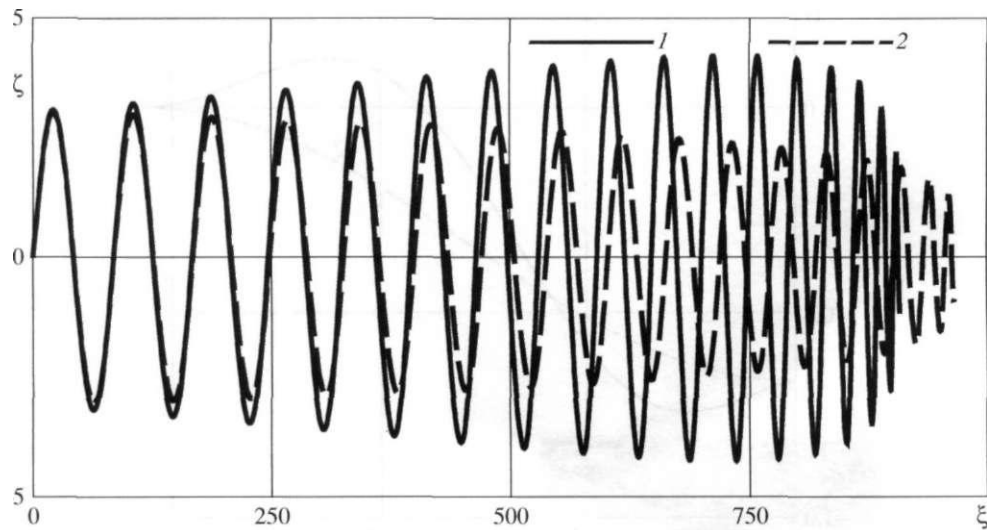
$$u^2 + \frac{1}{2} \Gamma^2 \cos^2 \varphi = T + \frac{1}{2} \Gamma_0^2 \cos^2 \varphi_0 \quad (2.5)$$

где Γ_0 - начальное значение полной энергии тела. Из формулы (2.5) видно, что полная энергия убывает вследствие радиационных потерь линейно со временем и за конечное время $T_0 = 3\Gamma_0/2$ обращается в нуль. Естественно, только продольная компонента радиационной силы при этом способствует потерям энергии, тогда как поперечная компонента работы не совершает.

Еще одно полезное уравнение для составляющей кинетической энергии, связанной с движением вдоль оси x , вытекает из системы (2.4):

$$\frac{d(w \cos \varphi)}{dx} = C(\varphi) = -\cos^2 \varphi \left(\frac{2}{u} + R_{\perp}(q) \right) \quad (2.6)$$

Отсюда видно, что потеря кинетического импульса вдоль оси x обусловлена как продольной, так и поперечной компонентами радиационной силы. Кроме того, анализ этой формулы показывает, что благодаря поперечной компоненте радиационной силы функция $C(\varphi)$ становится положительной (т.е. импульс тела вдоль оси x возрастает) при углах $\varphi > 0.89$. Зависимость $C(\varphi)$ представлена на фиг. 3 (кривая 1), где для сравнения показана эта же зависимость при $L_{\perp}(\varphi) = 0$, когда боковая сила не учитывается (кривая 2).



Фиг. 4

3. Область применимости развиваемого подхода. Оценим границы применимости используемой системы уравнений. Квазистационарное приближение справедливо в случае, когда характерный временной масштаб N^{-1} изменения скорости тела, колеблющегося под действием силы тяжести и архимедовой силы, велик по сравнению с временем a/v , установления волнового поля в системе отсчета, связанной с телом (в этом можно убедиться, формально подставляя выражение (1.6) в условие (1.5)). Это же условие согласуется с условием применимости замены тела дипольным источником; в обоих случаях скорость тела должна быть достаточно велика, или, точнее, число Фруда должно быть большим.

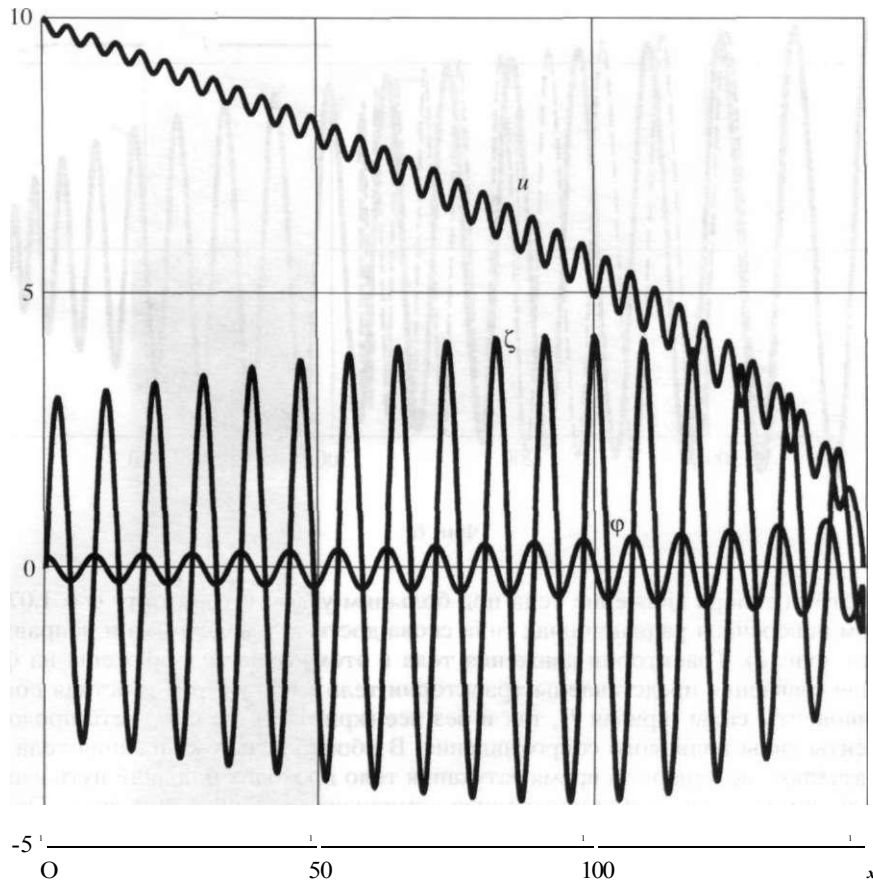
С другой стороны, использованное ранее приближение Буссинеска справедливо в случае, когда характерный масштаб изменения плотности g/N много больше характерной длины излучаемых телом волн v/N , что в безразмерных переменных дает $u < ib$.

Оба указанных ограничения сводятся к двойному неравенству

$$1 < u < b \quad (3-D)$$

Напомним, что безразмерный параметр $b = gl(N a)$ равен отношению масштаба изменения плотности к радиусу тела, которое во всех практически важных случаях, действительно, весьма велико (например, характерный масштаб изменения плотности в атмосфере составляет 8 км), так что для безразмерной скорости u (или для числа Фруда) есть достаточно широкий диапазон допустимых значений.

4. Расчет траекторий движения цилиндра. Поскольку систему уравнений (2.4) аналитически решить не удастся, анализ ее типичных решений был выполнен с помощью численного интегрирования. Вначале рассмотрим движение тела с заданной начальной скоростью $u_0 = 10$ из положения нейтральной плавучести $C_0 = 0$ под углом $\phi_0 = 0.217$ к оси x (при этом поперечная компонента радиационной силы достигает локального максимума и направлена от оси x). На фиг. 4 изображены траектории движения тела как с учетом действия поперечной компоненты радиационной силы (кривая 1), так и без нее (кривая 2), но при учете продольной силы волнового сопротивления. (Отметим, что без учета радиационной силы траектория движения тела представляет собой

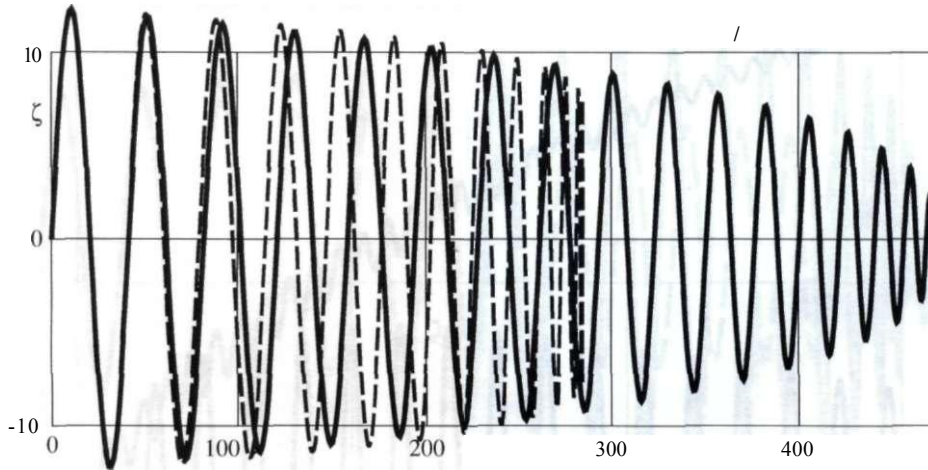


Фиг. 5

незатухающие колебания, амплитуда и период которых приблизительно такие же, как на начальном участке траектории.) Видно, что под влиянием боковой силы амплитуда колебаний тела вначале заметно возрастает, а потом резко падает до нуля, тогда как действие одной лишь продольной компоненты радиационной силы приводит к монотонному затуханию колебаний. Этот эффект тем ощутимее, чем меньше начальный угол наклона вектора скорости к горизонтальной оси.

Кроме того, при учете полной радиационной силы за время затухания T_0 тело проходит более короткий путь по горизонтали, чем при воздействии одной лишь силы волнового сопротивления. Уменьшение пройденного расстояния вдоль горизонтали согласуется с формулой (2.6), ибо при малых углах ϕ функция $I_0(\phi)$ положительна (см. также поведение функции $S(\phi)$ на фиг. 3), т.е. затухание x -компоненты импульса происходит более интенсивно.

На фиг. 5 изображены временные зависимости вертикальной координаты тела ϕ , модуля скорости u и угла ϕ , определяющего направление движения тела. В соответствии с формулой (2.5) колебания обрываются при $x = T_0 = 150$, когда полная энергия тела обращается в нуль. В действительности построенное решение перестает быть справедливым несколько раньше, при $u \sim 1$, когда нарушаются границы применимости используемого приближения, задаваемые условием (3.1).



Фиг. 6

Рассмотрим теперь движение тела под большим углом к горизонту $\phi = 1.078$ рад. При этом поперечная радиационная сила снова достигает максимума и направлена к оси x (см. фиг. 2). Траектории движения тела в этом случае изображены на фиг. 6. Снова для сравнения представлены траектории тела как с учетом действия поперечной компоненты силы (кривая 1), так и без нее (кривая 2), но при учете продольной компоненты силы волнового сопротивления. В обоих случаях колебания тела монотонно затухают, но теперь за время затухания тело проходит больший путь вдоль горизонтали, когда учитывается поперечная компонента радиационной силы. Этот эффект также находит объяснение в рамках формулы для функции $S(\phi)$: при больших углах эта функция по модулю убывает и даже становится положительной, что соответствует ускорению тела вдоль горизонтальной оси. Заметим, что, как следует из формулы (2.5), время затухания движения T_z не зависит от начального угла ϕ .

Колебания угла наклона вектора скорости к оси x , $\phi(x)$, в рассматриваемом случае происходят с постоянной амплитудой вплоть до завершения движения (ср. с фиг. 5, где амплитуда колебаний $\phi(t)$ нарастает). При больших начальных углах ϕ_0 е (1.078, $\pi/2$) амплитуда этих колебаний убывает со временем, а при ϕ_0 е (0, 1.078) - нарастает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. 335 с.
2. Lighthill J. Waves in Fluids. Cambridge: Univ. Press, 1978 = Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц ЕМ. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
4. Городцов В.А., Резник С.Н., Степанянц Ю.А. Радиационные силы, действующие на точечные источники, движущиеся в стратифицированной жидкости // ЖЭТФ. 1997. Т. 112. Вып. 2. С. 507-523.
5. Степанянц Ю.А., Фабрикант АЛ. Особенности черепковского излучения дрейфовых волн в гидродинамике и в плазме // ЖЭТФ. 1992. Т. 102. Вып. 5. С. 1512-1523.