**Определение 3.1.** Пусть $X$ и $Y$ — нормированные пространства. *Модулем инъективности* оператора $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ называется число

$$j(T) = \sup\{c \geqslant 0 : \|Tx\| \geqslant c\|x\| \quad \forall x \in X\}.$$

Оператор $T$ топологически инъективен тогда и только тогда, когда $j(T) > 0$ (см. лекцию).

**3.1.** Докажите, что если $X \neq 0$, то $j(T) \leqslant \|T\|$ и sup в определении $j(T)$ достигается. Что можно сказать про $j(T)$, если $X = 0$?

**3.2.** Пусть $X$ и $Y$ — нормированные пространства, $X \neq 0$. Докажите, что линейный оператор $T\colon X \to Y$ изометричен тогда и только тогда, когда $\|T\| = j(T) = 1$.

**3.3.** Докажите, что оператор $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ топологически инъективен тогда и только тогда, когда $T = JT_0$, где $J$ — тождественное вложение подпространства $Y_0 \subset Y$ в $Y$, а $T_0\colon X \to Y_0$ — топологический изоморфизм. При этом $j(T) = \|T_0^{-1}\|^{-1}$.

**Определение 3.2.** Пусть $X$ и $Y$ — нормированные пространства. *Модулем сюръективности* линейного оператора $T\colon X \to Y$ называется число

$$q(T) = \sup\{r \geqslant 0 : \mathbb{B}^{\circ}_{r,Y} \subset T(\mathbb{B}^{\circ}_{1,X})\}.$$

**3.4.** Докажите, что если $Y \neq 0$, то $q(T) \leqslant \|T\|$ и sup в определении $q(T)$ достигается. Что можно сказать про $q(T)$, если $Y = 0$?

**3.5.** Пусть $X$ и $Y$ — нормированные пространства, $Y \neq 0$. Докажите, что линейный оператор $T\colon X \to Y$ коизометричен тогда и только тогда, когда $\|T\| = q(T) = 1$.

**3.6.** Докажите, что оператор $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ открыт тогда и только тогда, когда $T = T_0 Q$, где $Q$ — факторотображение $X$ на некоторое его факторпространство $X/X_0$, а $T_0\colon X/X_0 \to Y$ — топологический изоморфизм. При этом $q(T) = \|T_0^{-1}\|^{-1}$.

**3.7.** Вычислите $j(T)$ и $q(T)$ для
1) диагонального оператора в $\ell^p$ или $c_0$ (см. лекцию);
2) оператора умножения в $C_b(X)$ (см. листок 2);
3) оператора умножения в $L^p(X,\mu)$ (см. листок 2).

**3.8.** Пусть $X$ — нормированное пространство и $X_0 \subset X$ — замкнутое векторное подпространство. Предположим, что на $X/X_0$ введена норма со следующим свойством: факторотображение $Q\colon X \to X/X_0$ ограничено, и для каждого нормированного пространства $Y$ и каждого $T \in \mathscr{B}(X,Y)$, удовлетворяющего условию $T(X_0) = 0$, существует единственный $\hat{T} \in \mathscr{B}(X/X_0, Y)$ такой, что $\hat{T}Q = T$ и $\|\hat{T}\| = \|T\|$. Докажите, что норма на $X/X_0$ равна факторнорме нормы на $X$.

**3.9.** Пусть $(X,\mu)$ — пространство с мерой и $B(X)$ — пространство всех ограниченных измеримых функций на $X$, снабженное равномерной нормой. Постройте изометрический изоморфизм между $L^\infty(X,\mu)$ и некоторым факторпространством пространства $B(X)$.