2.1. Докажите, что нормированное пространство сепарабельно тогда и только тогда, когда в нем есть плотное подпространство не более чем счетной размерности.

2.2. Докажите, что пространства c_0, $C[a,b]$, ℓ^p, $L^p[a,b]$, $L^p(\mathbb{R})$ при $p < \infty$ сепарабельны, а ℓ^∞, $C_b(\mathbb{R})$, $L^\infty[a,b]$ и $L^\infty(\mathbb{R})$ несепарабельны.

2.3. Докажите, что подмножество сепарабельного метрического пространства, рассмотренное как метрическое пространство с индуцированной метрикой, само сепарабельно.

2.4*. Мера μ, определенная на некоторой σ-алгебре подмножеств множества X, называется *сепарабельной*, если существует не более чем счетное семейство $\mathscr{B}$ измеримых подмножеств конечной меры в X, обладающее тем свойством, что для каждого измеримого множества конечной меры $A \subset X$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $B \in \mathscr{B}$, что $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$.

1) Докажите, что мера Лебега в $\mathbb{R}^n$ сепарабельна.
2) Интерпретируйте сепарабельность меры как сепарабельность некоторого метрического пространства, состоящего из измеримых подмножеств X (по модулю некоторого отношения эквивалентности).
3) Пусть $1 \leqslant p < \infty$, и пусть μ σ-конечна (это означает, что X является объединением не более чем счетного числа измеримых множеств конечной меры). Докажите, что $L^p(X,\mu)$ сепарабельно тогда и только тогда, когда μ сепарабельна.
4) Докажите, что $L^\infty(X,\mu)$ несепарабельно за исключением того (тривиального) случая, когда в X имеется лишь конечное число измеримых множеств.

2.5. Пусть X, Y — нормированные пространства, причем X конечномерно. Докажите, что любой линейный оператор $T\colon X \to Y$ ограничен и достигает нормы.

2.6. Пусть $\lambda \in \ell^\infty$, и пусть $X = \ell^p$ или c_0. Напомним, что *диагональный оператор* $M_\lambda\colon X \to X$ переводит вектор $x \in X$ в вектор $(\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, и что $\|M_\lambda\| = \sup_n |\lambda_n|$ (см. лекцию). При каких условиях оператор M_λ достигает нормы?

2.7. Зафиксируем точку $t_0 \in [a,b]$ и рассмотрим линейный функционал

$$F\colon (C[a,b], \|\cdot\|_p) \to \mathbb{K}, \quad F(x) = x(t_0).$$

1) При каких $p \in [1,+\infty]$ функционал F ограничен? **2)** Найдите его норму. **3)** Достигает ли он нормы?

2.8. Пусть $X = (C[a,b], \|\cdot\|_p)$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$, и пусть $f \in C[a,b]$. *Оператор умножения* $M_f\colon X \to X$ действует по правилу

$$M_f(g) = fg \qquad (f \in X).$$

1) Докажите, что M_f ограничен. **2)** Вычислите его норму. **3)** При каких условиях оператор M_f достигает нормы?

2.9. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, и пусть $f\colon X \to \mathbb{K}$ — существенно ограниченная измеримая функция. Зафиксируем $p \in [1,+\infty]$. *Оператор умножения* $M_f\colon L^p(X,\mu) \to L^p(X,\mu)$ действует по правилу

$$M_f(g) = fg \qquad (f \in L^p(X,\mu)).$$

1) Докажите, что M_f ограничен. **2)** Вычислите его норму. **3)** При каких условиях оператор M_f достигает нормы?

2.10. Пусть $X = L^p[0,1]$ ($1 \leqslant p \leqslant +\infty$). Оператор *неопределенного интегрирования* $T\colon X \to X$ действует по формуле

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad (f \in X).$$

1) Докажите, что T ограничен. **2)** Для $p = 1$ и $p = \infty$ вычислите его норму. **3)** Для тех же p выясните, достигает ли он нормы.

Анонс: для $p = 2$ норма этого оператора равна $2/\pi$. В свое время мы это сможем доказать.

2.11. Пусть $I = [a,b]$, и пусть $K \in C(I \times I)$. *Интегральный оператор* $T\colon C(I) \to C(I)$ задается формулой

$$(Tf)(x) = \int_X K(x,y) f(y)\,dy.$$

Докажите, что T корректно определен, ограничен, и что $\|T\| \leqslant \|K\|_\infty$.

2.12. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, и пусть $K \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$. *Интегральный оператор Гильберта–Шмидта* $T\colon L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$ задается формулой

$$(Tf)(x) = \int_X K(x,y) f(y)\,d\mu(y).$$

Докажите, что T корректно определен, ограничен, и что $\|T\| \leqslant \|K\|_2$.

2.13. Пусть X, Y — нормированные пространства. Напомним, что линейный оператор $T\colon X \to Y$ называется *коизометрией*, если он отображает открытый единичный шар пространства X на открытый единичный шар пространства Y.

1) Докажите, что если T отображает замкнутый единичный шар пространства X на замкнутый единичный шар пространства Y, то T — коизометрия.
2) Верно ли обратное утверждение?

2.14. Пусть $\lambda \in \ell^\infty$, и пусть $X = \ell^p$ или c_0. При каких условиях на λ диагональный оператор $M_\lambda\colon X \to X$ **1)** топологически инъективен; **2)** открыт; **3)** изометричен; **4)** коизометричен?

2.15. Ответьте на те же четыре вопроса для оператора умножения из задачи 2.9.

2.16. Постройте линейные изометрические вложения **1)** $\mathbb{K}_p^n$ в $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$, **2)** ℓ^∞ в $C_b(\mathbb{R})$, **3)** c_0 в $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$.

2.17. Докажите, что следующие свойства нормированного пространства X эквивалентны:
(1) равенство $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ возможно только для пропорциональных x, y;
(2) единичная сфера $\mathbb{S}_X$ не содержит нетривиальных отрезков;
(3) если $x, y \in \mathbb{S}_X$ и $x \neq y$, то $\|x+y\| < 2$.

Нормированные пространства, обладающие этими свойствами, называются *строго нормированными*, а норма с указанными свойствами — *строго выпуклой*.

2.18. 1) Найдите условия, необходимые и достаточные для того, чтобы неравенство Юнга и неравенство Гёльдера (см. листок 1) обращались в равенства.
2) Докажите, что пространства $\mathbb{K}_p^n$, ℓ^p, $L^p(X,\mu)$ являются строго нормированными при $1 < p < +\infty$.

2.19. Докажите, что пространства $L^1(X,\mu)$ и $L^\infty(X,\mu)$ не являются строго нормированными за исключением того (тривиального) случая, когда X — единственное непустое измеримое подмножество в X.