Домашнее задание 3

Задача 1. Найдите закон движения частицы с лагранжианом
$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}{2} + y.$$
(Указание: вспомните школьную физику и прошлогодний курс механики).

Задача 2. Рассмотрим лагранжиан, определенный в верхней полуплоскости формулой
$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}{y}$$
Докажите, что истинные траектории — это полуокружности с центром на горизонтальной оси. (Указание: можно проинтегрировать уравнения Эйлера–Лагранжа, а можно вспомнить домашнее задание 1).

Задача 3. Пусть $L(x, \dot{x})$ — квадратичная форма от $\dot{x} \in \mathbb{R}^n$, коэффициенты которой зависят от $x \in \mathbb{R}^n$ (достаточно гладко). Докажите, что
$$\frac{d}{dt} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$$
для любой истинной траектории γ гамильтониана L.

Задача 4. В условиях предыдущей задачи предположим дополнительно, что $L(x, v) > 0$ для всякого ненулевого вектора v. Докажите, что истинные траетории лагранжиана L являются также истинными траекториями лагранжиана $\sqrt{L}$ (лагранжиан L называют *римановой метрикой*, а его истинные траектории — геодезическими этой метрики; интеграл от $\sqrt{L}$ вдоль гладкой кривой равен длине этой кривой относительно данной римановой метрики).