Домашнее задание 2

Задача 1. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — подмножество, удовлетворяющее соотношению $A + A = 2A$. Докажите, что если A замкнуто или открыто, то A выпукло.

Задача 2. Рассмотрим изотропную среду, занимающую плоскость $\mathbb{R}^2$. Пусть $v(x, y)$ обозначает (скалярную) скорость света в точке (x, y). Рассмотрим функцию $W(x_0, y_0, x, y)$, равную минимальному времени, которое свет может потратить на прохождение от точки (x_0, y_0) до точки (x, y). Докажите, что вектор скорости света в точке (x, y) пропорционален вектору с координатами $\frac{\partial W}{\partial x}(x_0, y_0, x, y)$, $\frac{\partial W}{\partial y}(x_0, y_0, x, y)$. Найдите коэффициент пропорциональности.

Задача 3. В условиях предыдущей задачи, докажите, что функция W удовлетворяет следующему уравнению с частными производными (уравнению эйконала):

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{v(x, y)^2}.$$

Задача 4. Проверьте, что функция $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 1$$

всюду, кроме начала координат.

Задача 5. Пусть $f(x, y)$ равно минимальному расстоянию от точки (x, y) до эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Докажите, что для всех точек во внешности эллипса выполняется уравнение из предыдущей задачи. Найдите еще какие-нибудь решения этого уравнения с частными производными.