Произвольные ряды

Задача 1. a) Докажите *признак Лейбница*: если a_n — последовательность неотрицательных вещественных чисел, такая что $a_n \geqslant a_{n+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ сходится.

b) Необходимо ли в этом признаке предполагать $a_n \geqslant a_{n+1}$?

Задача 2. Пусть ряды $a_1+a_2+\ldots$ и $b_1+b_2+\ldots$ сходятся абсолютно к A и B соответственно. Докажите, что ряд, составленный из произведений $a_n b_m$, n, $m \in \mathbb{N}$, сходится абсолютно, и его сумма равна AB.

Задача 3. a) Докажите, что ряд $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$ сходится абсолютно для любого комплексного z.

b) Докажите, что $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

c) Докажите, что $|e^{\phi i}| = 1$ для вещественных ϕ.

Подсказка: сначала докажите, что $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$.

Задача 4. Пусть a_n и b_n — последовательности вещественных чисел.

a) Рассмотрим частичные суммы $B_n = b_1 + \cdots + b_n$. Докажите, что

$$\sum_{n=1}^{k} a_n b_n = a_{k+1}B_k - \sum_{n=1}^{k}(a_{n+1} - a_n)B_n. \tag{1}$$

b) Докажите *признак Абеля*: если последовательность a_n монотонна и ограничена, а ряд $b_1 + b_2 + \ldots$ сходится, то ряд $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots$ сходится.

Подсказка: докажите, что последовательность $a_{k+1}B_k$ сходится, затем примените критерий Коши ко второму слагаемому (1).

c) Докажите *признак Дирихле*: если последовательность a_n монотонна и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, а последовательность B_n ограничена, то ряд $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots$ сходится.

Подсказка: действуйте аналогично.

d^*) Необходима ли монотонность a_n в этих признаках?

Задача 5. Выясните, сходятся ли следующие ряды.

a) $\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{4} - \frac{\sin(4x)}{8} + \ldots,\ x \in \mathbb{R}$;

b) $\sin(\pi\sqrt{2}) + \sin(2\pi\sqrt{2}) + \sin(3\pi\sqrt{2}) + \ldots$;

c) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$;

d) $\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \ldots,\ p, q \in \mathbb{N}$;

e) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$;

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{2}}{n}$;

g) $\sin(x) + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \ldots,\ x \in \mathbb{R}$;

h^*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)P(n)}{Q(n)}$, где P и Q — многочлены.

i^*) При каких x ряд пункта g) сходится абсолютно?

Задача 6*. Какие подмножества $\mathbb{C}$ можно получить перестановками слагаемых условно сходящегося ряда комплексных чисел?