Возведение в степень

Задача 1. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$. Докажите, что предел при $x \to a$ функции $g(f(x))$ существует тогда и только тогда, когда выполнено какое-нибудь из следующих условий:

1) $g(y)$ непрерывна в точке b;

2) найдётся такое вещественное $\delta > 0$, что $f(x) \neq b$ при $0 < |x - a| < \delta$.

Чему равен этот предел?

Задача 2. Будем говорить, что функция вещественной переменной $f : D \to \mathbb{R}$ *липшицева* в точке $x \in D$, если найдутся такие $c \in \mathbb{R}$ и $\delta > 0$, что для всех $y \in D$, удовлетворяющих $|y - x| < \delta$, выполнено $|f(y) - f(x)| < c|y - x|$.

a) Докажите, что всякая липшицева в x функция непрерывна в x.

b) Приведите пример непрерывной в x функции, не являющейся липшицевой в x.

Задача 3. a) Докажите, что функция $e^x = \sum x^n/n!$ непрерывна в точке 0.

Подсказка: воспользуйтесь предыдущей задачей.

b) Докажите, что функция e^x неперывна на всей вещественной оси.

Подсказка: воспользуйтесь тем, что $e^{a+b} = e^a e^b$.

c) Докажите, что функция e^x принимает все положительные вещественные значения.

Подсказка: воспользуйтесь теоремой о промежуточном значении.

d) Докажите, что e^x — строго возрастающая функция.

Задача 4. a) Докажите, что e^x задаёт изоморфизм группы $\mathbb{R}^+$ вещественных чисел по сложению и группы $\mathbb{R}^*_{>0}$ положительных вещественных чисел по умножению.

b) Докажите, что группа $\mathbb{R}^*$ ненулевых вещественных чисел по умножению изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$.

c^*) Изоморфны ли $\mathbb{Q}^+$ и $\mathbb{Q}^*_{>0}$?

Определение 1. Функция $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, обратная к e^x, называется *натуральным логарифмом.* Для a, $b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ определим *степень* $a^b = e^{b\ln(a)}$.

Задача 5. a) Докажите, что $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

b) Докажите, что $(ab)^c = a^c b^c$, $a^{b+c} = a^b a^c$, $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$.

c) Пусть $f(x)$, $g(x)$ — непрерывные функции вещественной переменной, причём $f(x) > 0$. Докажите, что $f(x)^{g(x)}$ — непрерывная функция.

d) Докажите, что функция x^a для $a \in \mathbb{R}$ — строго возрастающая при $a > 0$ и строго убывающая при $a < 0$. Найдите обратную к ней функцию.

e) Докажите, что функция a^x для $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ — строго возрастающая при $a > 1$ и строго убывающая при $a < 1$. Найдите обратную к ней функцию.

Задача 6. Найдите пределы функций:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha$, $\alpha > 0$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} x^{1/x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(1/x)$;

f^*) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{1/x}$.