# Ряды Тейлора

**Задача 1.** Запишите ряды Тейлора для следующих функций в точке $x = x_0$ внутри области определения, определите их радиусы сходимости и выясните, где они сходятся к значениям функции:

a) $x^n$, $n \in \mathbb{Z}$;

b) $x^a$, $a \in \mathbb{R}$;

c) $a^x$, $a > 0$;

d) $\ln(x)$;

e) $\sin(x)$ и $\cos(x)$.

**Задача 2.** Запишите ряды Тейлора для следующих функций в точке $x = 0$, определите их радиусы сходимости и выясните, где они сходятся к значениям функции:

a) $\operatorname{arctg}(x)$;

b) $\arcsin(x)$ и $\arccos(x)$;

c) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

**Задача 3.** a) Докажите, что

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

b) Пусть $n \in \mathbb{N}$. Запишите $\ln(n)$ рядом из рациональных чисел.

c) Докажите, что

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \dots$$

**Определение 1**. Будем называть перестановку $\sigma$ множества $\{1, 2, \dots, n\}$ *зигзагообразной*, если $\sigma(2k-1) < \sigma(2k)$ и $\sigma(2k) < \sigma(2k+1)$ для всех $k$, где это имеет смысл. Количество таких перестановок назовём *числом Эйлера* и обозначим $E_n$.

**Задача 4*.** $a^*$) Докажите, что для всех $n > 0$ выполнено $2E_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k E_{n-k}$.

$b^*$) Докажите, что разложение $\operatorname{tg}(x)$ в ряд Тейлора в $x = 0$ выглядит как

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$c^*$) Докажите, что разложение $1/\cos(x)$ в ряд Тейлора в $x = 0$ выглядит как

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

**Определение 2**. Определим *числа Бернулли* $B_n$ как коэффициент при $\frac{x^n}{n!}$ ряда Тейлора функции $\frac{x}{e^x-1}$ в точке $x = 0$.

**Задача 5*.** $a^*$) Докажите, что $B_n = 0$ при нечётном $n > 1$.

$b^*$) Выразите $B_{2n}$ через $E_{2n-1}$.

**Задача 6*.** $a^*$) Докажите, что для $k \in \mathbb{N}$ выражение $S_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$ совпадёт с некоторым многочленом от $n$ степени $k+1$.

$b^*$) Выразите коэффициенты этого многочлена через числа Бернулли.

*Подсказка: просуммируйте $S_k(n)/k!$ по $k$.*