Обобщенный непараметрический метод Приложение к анализу фондовых рынков

И.А. Кондраков, А.А. Шананин

Московский физико-технический институт

Построение экономических индексов

X – потребительская корзина

p – вектор цен на товары

$\langle p, X \rangle$ – стоимость корзины товаров

t – базовый период времени

τ – текущий период времени

$$\lambda = \frac{\langle p^t, X^\tau \rangle}{\langle p^t, X^t \rangle}$$ – Индекс спроса Ласпейреса

$$\pi = \frac{\langle p^\tau, X^\tau \rangle}{\langle p^\tau, X^t \rangle}$$ – Индекс спроса Пааше

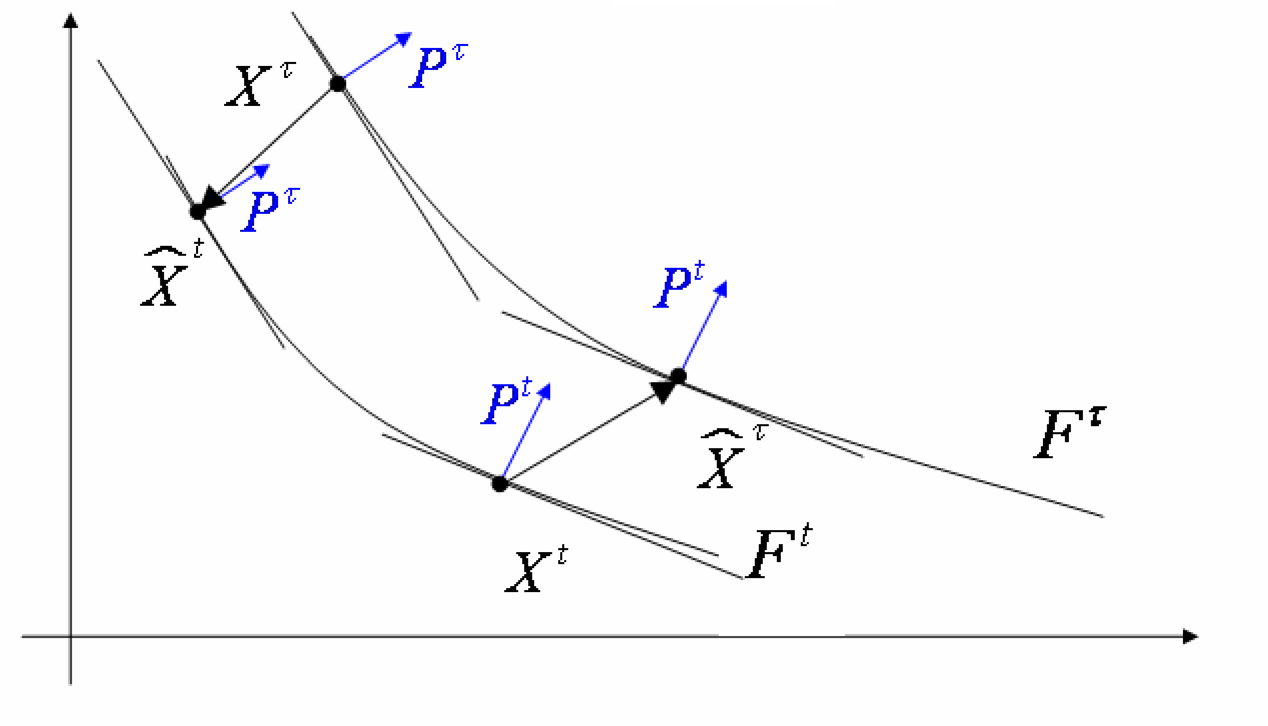
$\lambda > \pi$ – эффект Гершенкрона

Индексы Конюса

- Пусть у нас задана система поверхностей безразличия. Спросу в момент времени X^{τ} соответствует уровень полезности F^{τ}; а спросу X^{t} - уровень полезности F^{t}. Набор товаров, который мог быть куплен при ценах P^{t} в момент времени τ и имеющий полезность F^{τ}, обозначим $\widehat{X}^{\tau}$. Набор товаров, который мог быть куплен при ценах P^{τ} в момент времени t и имеющий полезность F^{t}, обозначим $\widehat{X}^{t}$.

$$\frac{\left\langle P^{t}, \widehat{X}^{\tau} \right\rangle}{\left\langle P^{t}, X^{t} \right\rangle}$$ индекс спроса Конюса-Ласпейреса.

$$\frac{\left\langle P^{\tau}, X^{\tau} \right\rangle}{\left\langle P^{\tau}, \widehat{X}^{t} \right\rangle}$$ индекс спроса Конюса-Пааше.



Задача о рационализируемости

$X = (X_1, ..., X_m)$ – объемы потребления товаров

$P = (p_1, ..., p_m)$ – цены на эти товары

$P(X) = (P_1(X), ..., P_m(X))$ – обратные функции спроса

Φ_0 – класс непрерывных, вогнутых, положительно-однородных и положительных в $\operatorname{int} R_+^m$ функций

Определение. $P(X)$ *рационализируемы в классе* Φ_0 *, если* $\exists$ *такая функция полезности* $F(X) \in \Phi_0$*, что*

$$X \in \operatorname{Argmax}\left\{ F(Y) \mid \left\langle P(X), Y \right\rangle \le \left\langle P(X), X \right\rangle,\ Y = (Y_1, ..., Y_m) \ge 0 \right\}$$

Постановки задачи о рационализируемости

Предложение 1.

Пусть $\forall X > 0$ выполнено $\langle P(X), X\rangle > 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- Существуют $F(X) \in \Phi_0, Q(P) \in \Phi_0$, такие что

$$\begin{aligned} &\forall X > 0,\ \forall P \geq 0 \quad Q(P)F(X) \leq \langle P, X\rangle; \\ &\forall X > 0 \qquad\qquad\quad Q(P(X))F(X) = \langle P(X), X\rangle; \end{aligned} \tag{2}$$

- Существует функция $F(X) \in \Phi_0$, такая что $\forall X > 0$ справедливо

$$P(X) \in Q(P(X))\partial F(X)$$

- где *Q(P)* – преобразование Янга функции *F(X)*

$$Q(P) = \inf\left\{ \frac{\langle P, X\rangle}{F(X)} \,\middle|\, X \geq 0, F(X) > 0 \right\};$$

- Существует $F(X) \in \Phi_0$ такая, что $\forall X > 0$ справедливо

$$X \in Arg\max\left\{ F(Y) \,\middle|\, \langle P(X), Y\rangle \leq \langle P(X), X\rangle,\ Y \in R_+^m \right\}.$$

Критерий рационализируемости – I

Определение. $F(X)$ *принадлежит классу* U_m, *если* $F(X) \in C(\mathbb{R}_+^m)$ *и в* $\operatorname{int} \mathbb{R}_+^m$ *выполнены следующие условия:*

1. $F(X) > 0 \quad \forall X > 0;$

2. $F(X) \in C^1(\operatorname{int} \mathbb{R}_+^m);$

3. $F(\lambda X) = \lambda F(X) \quad \forall \lambda > 0, X > 0;$

4. $F'(X) > 0 \quad \forall X > 0;$

5. $F(X)$ *строго квазивогнута;*

6. $\forall Y > 0 \ \exists$ *хотя бы одно оптимальное на* $\operatorname{int} \mathbb{R}_+^m$ *решение*

$$\frac{\langle X, Y \rangle}{F(X)} \to \inf_{X > 0}$$

Критерий рационализируемости – II

Утверждение 1. *Пусть* $P(X) \in C^1(\mathbb{R}_+^m)$. *Обозначим* $M = \{1, ..., n\}$.

$P(X)$ *рационализируемы в* U_m *тогда и только тогда, когда:*

1. $P(X) > 0 \quad \forall X > 0$;

2. $\forall i, j \in \mathbb{N}, \ \forall \lambda > 0, \ \forall X > 0 \qquad \dfrac{P_i(\lambda X)}{P_j(\lambda X)} = \dfrac{P_i(X)}{P_j(X)}$;

3. $\forall X_1, X_2 > 0: \ X_1 \neq \lambda X_2$ *ни при каких* $\lambda > 0$

$$\langle P(X_1), X_2 \rangle \langle P(X_2), X_1 \rangle > \langle P(X_1), X_1 \rangle \langle P(X_2), X_2 \rangle;$$

4. $\forall$ *различных* $i, j, k \in M, \quad \forall X > 0$

$$P_i(X)\left(\frac{\partial P_j}{\partial X_k}(X) - \frac{\partial P_k}{\partial X_j}(X)\right) + P_j(X)\left(\frac{\partial P_k}{\partial X_i}(X) - \frac{\partial P_i}{\partial X_k}(X)\right) + P_k(X)\left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}(X) - \frac{\partial P_j}{\partial X_i}(X)\right) = 0;$$

5. $\forall X \in \partial \mathbb{R}_+^m \quad (M \setminus \{i \in M \mid X_i = 0\}) \cap \{j \in M \mid P_j(X) = 0\} \neq \varnothing$.

Условия интегрируемости

$$\omega = \sum_{j=1}^{m} P_j(X)\,dX_j$$

$$\exists ?\ \lambda(X):\ dF(X) = \lambda(X)\omega$$

$$\frac{\partial\left(\lambda(X)P_j(X)\right)}{\partial X_i} = \frac{\partial\left(\lambda(X)P_i(X)\right)}{\partial X_j}\ \left(i,\ j = 1,\dots,m\right)$$

$$\lambda(X)\left(\frac{\partial P_j(X)}{\partial X_i} - \frac{\partial P_i(X)}{\partial X_j}\right) = \frac{\partial\lambda(X)}{\partial X_j}P_i(X) - \frac{\partial\lambda(X)}{\partial X_i}P_j(X)$$

Условия интегрируемости

$$\lambda(X)\left(\frac{\partial P_j(X)}{\partial X_i}-\frac{\partial P_i(X)}{\partial X_j}\right)P_k(X)=\frac{\partial\lambda(X)}{\partial X_j}P_i(X)P_k(X)-\frac{\partial\lambda(X)}{\partial X_i}P_j(X)P_k(X)$$

$$\lambda(X)\left(\frac{\partial P_k(X)}{\partial X_j}-\frac{\partial P_j(X)}{\partial X_k}\right)P_i(X)=\frac{\partial\lambda(X)}{\partial X_k}P_j(X)P_i(X)-\frac{\partial\lambda(X)}{\partial X_j}P_k(X)P_i(X)$$

$$\lambda(X)\left(\frac{\partial P_i(X)}{\partial X_k}-\frac{\partial P_k(X)}{\partial X_i}\right)P_j(X)=\frac{\partial\lambda(X)}{\partial X_i}P_k(X)P_j(X)-\frac{\partial\lambda(X)}{\partial X_k}P_i(X)P_j(X)$$

Условия интегрируемости Фробениуса

$$P_i(X)\left(\frac{\partial P_j}{\partial X_k}(X)-\frac{\partial P_k}{\partial X_j}(X)\right)+P_j(X)\left(\frac{\partial P_k}{\partial X_i}(X)-\frac{\partial P_i}{\partial X_k}(X)\right)+P_k(X)\left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}(X)-\frac{\partial P_j}{\partial X_i}(X)\right)=0$$

Индекс потребления и индекс цен
Теория выявленного предпочтения

Функция полезности $F(X)$ – *индекс потребления*

$$Q(P)=\inf_{X>0,F(X)>0}\left\{\frac{<P,X>}{F(X)}\right\}$$ – *индекс цен*

$$Q(P(X))F(X)=\left\langle P(X),X\right\rangle$$

Определение. $X^1\in \mathbb{R}_+^m$ *выявленно предпочтительнее чем* $X^2\in \mathbb{R}_+^m$ *(обозначается* $X^1\succ X^2$ *), если и только если*

$$\left\langle P(X^1),X^1\right\rangle\geq\left\langle P(X^1),X^2\right\rangle,\quad X^1\neq X^2.$$

Слабая аксиома. *Если* $X^1,X^2\in \mathbb{R}_+^m$, $\left\langle P(X^1),X^1\right\rangle\geq\left\langle P(X^1),X^2\right\rangle$, $P(X^1)\neq P(X^2)$, *то* $\left\langle P(X^2),X^1\right\rangle>\left\langle P(X^2),X^2\right\rangle$.

Сильная аксиома и однородная сильная аксиома теории выявленного предпочтения

Определение. $X \geq 0$ *косвенно выявленно предпочтительнее, чем* $Y \geq 0$ *(обозначается* $X\,R\,Y$ *), если и только если* $\exists\, X^1 \geq 0, \ldots, X^k \geq 0,$ *что*

$$X = X^1 \succ X^2, X^2 \succ X^3, \ldots, X^{k-1} \succ X^k = Y.$$

Сильная аксиома. *Если* $X \geq 0, Y \geq 0,\ X\,R\,Y,$ *то* $\left\langle P(Y), X - Y \right\rangle \geq 0$

Определение. $P(X)$ *удовлетворяют однородной сильной аксиоме теории выявленного предпочтения (ОСА), если* $\forall \left\{X^1, \ldots, X^T\right\} \in \mathbb{R}_+^m$

$$\left\langle P(X^1), X^2 \right\rangle \left\langle P(X^2), X^3 \right\rangle \ldots \left\langle P(X^T), X^1 \right\rangle \geq$$

$$\geq \left\langle P(X^1), X^1 \right\rangle \left\langle P(X^2), X^2 \right\rangle \ldots \left\langle P(X^T), X^T \right\rangle$$

Рационализируемость обратных функций спроса

Утверждение 2 (см. [5]). *Пусть* $P(X) \geq 0,\ \ P(X) \in C(\mathbb{R}_+^m)$,

$$\langle P(X), X \rangle > 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны.

1. $P(X)$ *рационализируемы в классе* Φ_0.

2. $\exists$ *решение* $\lambda(X) > 0,\ \lambda(X) \in C(\operatorname{int} \mathbb{R}_+^m)$ *системы*

$$\lambda(Y)\langle P(Y), X \rangle \geq \lambda(X)\langle P(X), X \rangle, \qquad \forall X, Y \in \mathbb{R}_+^m$$

3. $P(X)$ *удовлетворяют ОСА.*

4.$\exists \quad F(X), Q(P) \in \Phi_0: \quad Q(P)F(X) \leq \langle P, X \rangle \quad \forall P, X$

$$P = P(X): \ \ Q(P(X))F(X) = \langle P(X), X \rangle$$

Индексы Дивизиа

$$\frac{D\left(X(t)\right)}{D\left(X(\tau)\right)} = \exp\left(\int_{\tau}^{t} \frac{\sum_{i=1}^{m} P_i\left(X(\theta)\right)\frac{dX_i(\theta)}{d\theta}}{\sum_{i=1}^{m} P_i\left(X(\theta)\right)X_i(\theta)}d\theta\right)$$

Предложение 4. *В случае, когда обратные функции спроса рационализируемы в классе дифференцируемых функций из* Φ_0 *индекс Конюса совпадает с индексом Дивизиа.*

$$\frac{D\left(X^t\right)}{D\left(X^\tau\right)} = \exp\left(\int_{\tau}^{t} \frac{\sum_{i=1}^{m} P_i\left(X(\theta)\right)\frac{dX_i(\theta)}{d\theta}}{\sum_{i=1}^{m} P_i\left(X(\theta)\right)X_i(\theta)}d\theta\right) = \exp\left(\int_{\tau}^{t} \frac{Q(P(X(\theta)))dF(X(\theta))}{Q(P(X(\theta)))F(X(\theta))}\right) =$$

$$= \exp\left(\int_{\tau}^{t} \frac{dF(X(\theta))}{F(X(\theta))}\right) = \exp\left(\int_{\tau}^{t} d\ln F(X(\theta))\right) = \frac{F\left(X^t\right)}{F\left(X^\tau\right)}.$$

Рационализируемость торговой статистики

$\left\{P^t, X^t\right\}_{t=0}^{T}$ – торговая статистика

$X^t = (X_1^t, \ldots, X_m^t)$ – объемы потребления товаров

$P^t = (p_1^t, \ldots, p_m^t)$ – цены на эти товары

Определение. *Торговая статистика называется рационализируемой, если ее можно продолжить до обратных функций спроса, рационализируемых в классе* Φ_0.

Теорема Африата – Вериана

Следующие утверждения эквивалентны:

1) $\exists$ *функция полезности вида* $F(X) = \min \lambda_t \langle P^t, X \rangle$,

рационализирующая торговую статистику $\{P^t, X^t\}_{t=0}^{T}$, *т.е.*

$$X^t \in \operatorname{Argmax}\{F(X) | \langle P^t, X \rangle \le \langle P^t, X^t \rangle,\ X \ge 0\}, \quad t = \overline{0,T}$$

2) $\exists$ *решение* $(\lambda_0, ..., \lambda_T)$ *системы линейных неравенств*

$$\lambda_\tau \langle P^\tau, X^t \rangle \ge \lambda_t \langle P^t, X^t \rangle, \lambda_t > 0, \quad \tau, t = \overline{0,T} \qquad \text{(I)}$$

3) $\{P^t, X^t\}_{t=0}^{T}$ *удовлетворяет ОСА:*

$$\forall\ \{t_1, ..., t_k\} \subset \{\overline{0,T}\}$$

$$\langle P^{t_1}, X^{t_2} \rangle \langle P^{t_2}, X^{t_3} \rangle ... \langle P^{t_k}, X^{t_1} \rangle \ge \langle P^{t_1}, X^{t_1} \rangle \langle P^{t_2}, X^{t_2} \rangle ... \langle P^{t_k}, X^{t_k} \rangle$$

Алгоритм Варшалла – Флойда

$$C_{\tau t} = \frac{\left\langle P^t, X^t \right\rangle}{\left\langle P^\tau, X^t \right\rangle}$$ – матрица индексов цен Пааше

2) $\Leftrightarrow \exists \lambda_t > 0,\ t = \overline{0,T}$, такие что $\lambda_t C_{\tau t} \le \lambda_\tau,\ \forall \tau, t = \overline{0,T}$

$$C^*_{\tau t} = \max\left\{ C_{\tau t_1} C_{t_1 t_2} \dots C_{t_k t} \,\middle|\, \{t_1, t_2, \dots, t_k\} \subset \mathrm{T}, k \in \mathbb{N} \right\}$$

(I) Разрешима $\Leftrightarrow C^*_{tt} \le 1,\ t = \overline{0,T}$, и $\lambda_t = \max\limits_{\beta = \overline{0,T}} C^*_{t\beta},\ t = \overline{0,T}$

Предложение

Пусть $F(X) = \min\limits_{\tau = \overline{0,T}} \lambda_\tau \left\langle P^\tau, X \right\rangle$, где $\lambda_0 > 0, \dots, \lambda_T > 0$ удовлетворяют (I), а

$$Q(P) = \inf\left\{ \frac{\left\langle P, Y \right\rangle}{F(Y)} \,\middle|\, Y \ge 0, F(Y) > 0 \right\}$$

Тогда

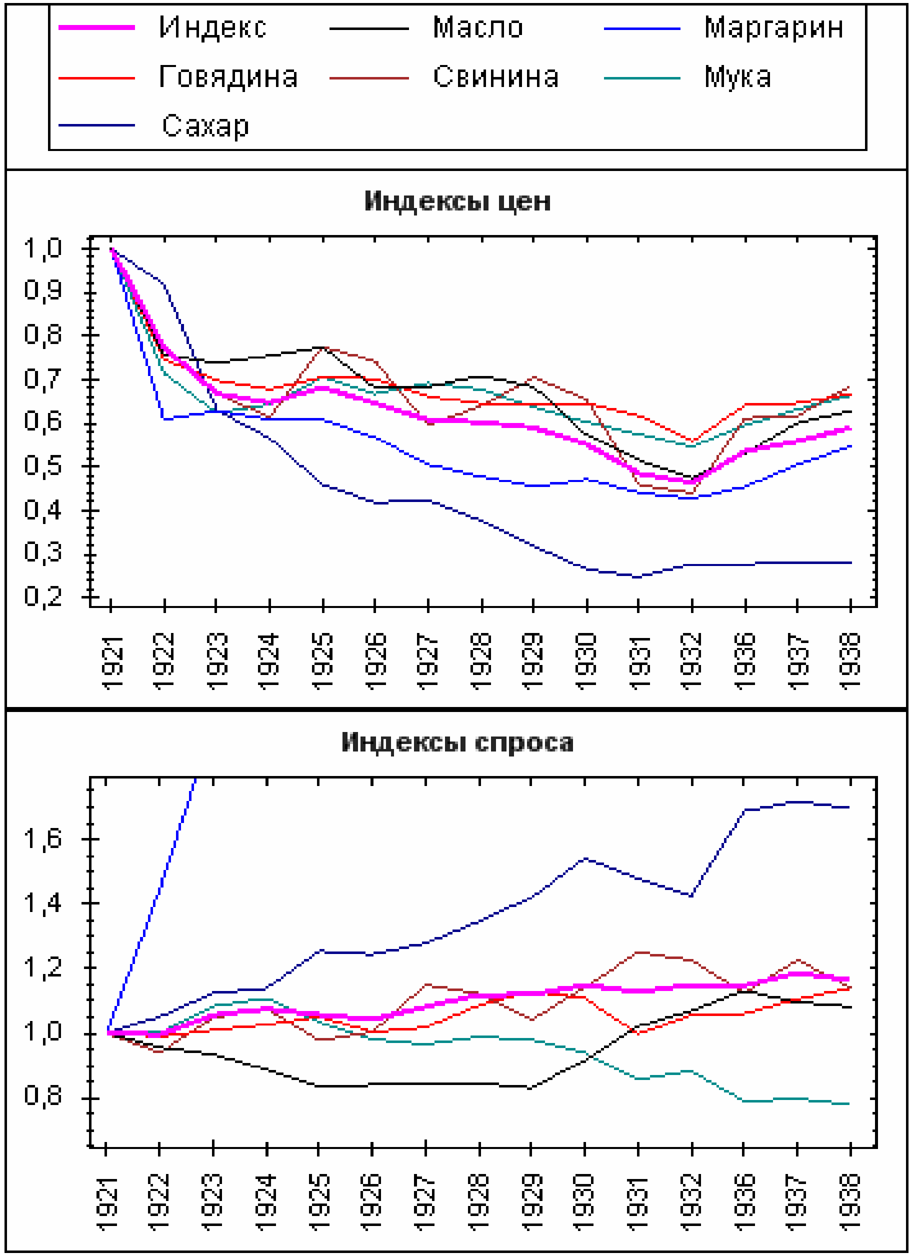
$$Q(P^t) = 1/\lambda_t \qquad F(X^t) = \lambda_t < P^t, X^t >$$

Шведская статистика и Великая Депрессия

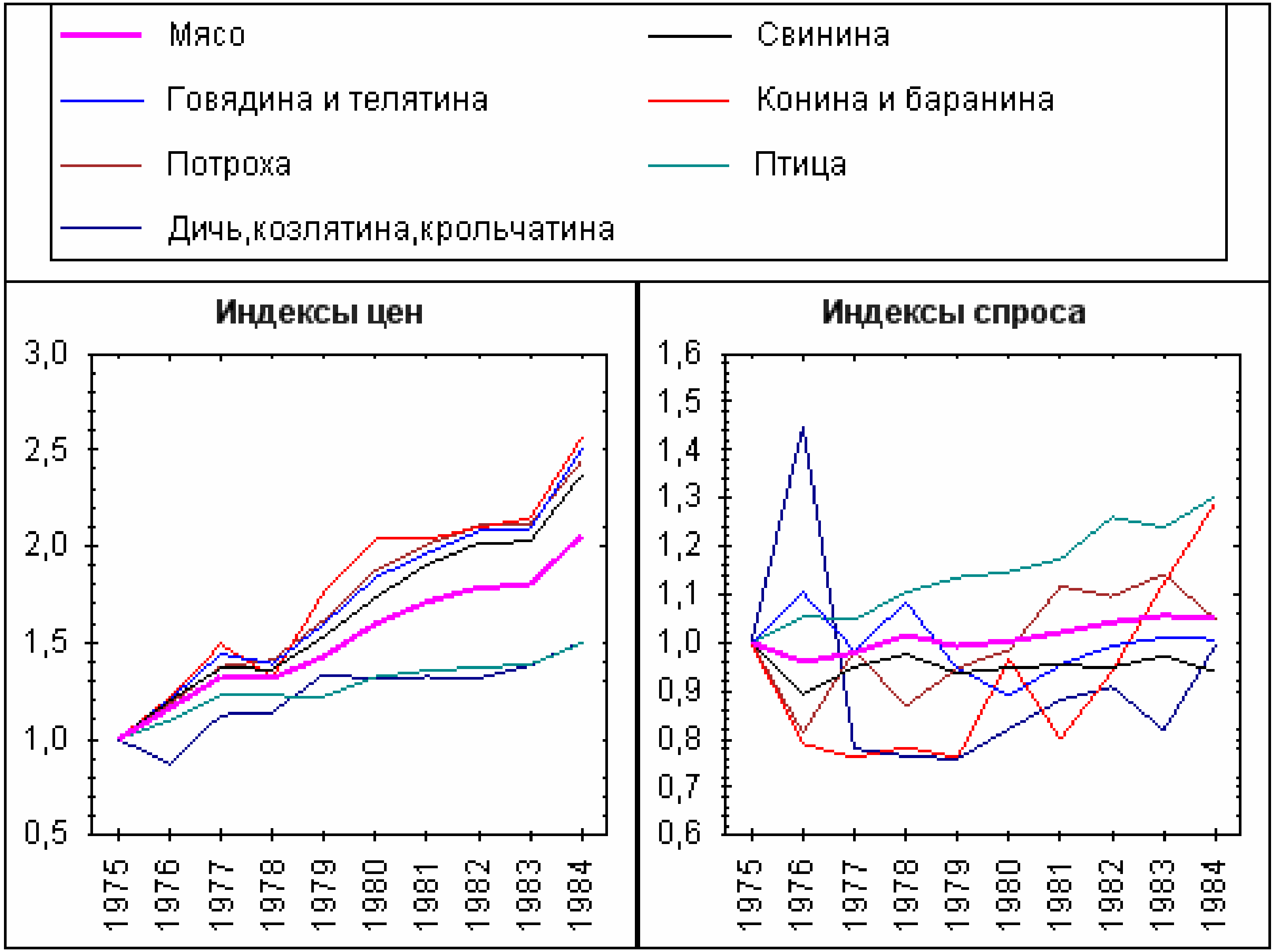
Применим непараметрический метод к анализу торговой статистики потребления продуктов питания в Швеции за период 1921-38 годы. Статистика рационализируема, если из нее исключить годы 1933-1935. Добавление хотя бы одного из этих моментов времени в статистику приводит к нарушению рационализируемости.

Можно сделать предположение, что нарушение условий рационализируемости (OCA) связано с системными перестройками в экономике Швеции, последовавшими за Великой экономической депрессией.

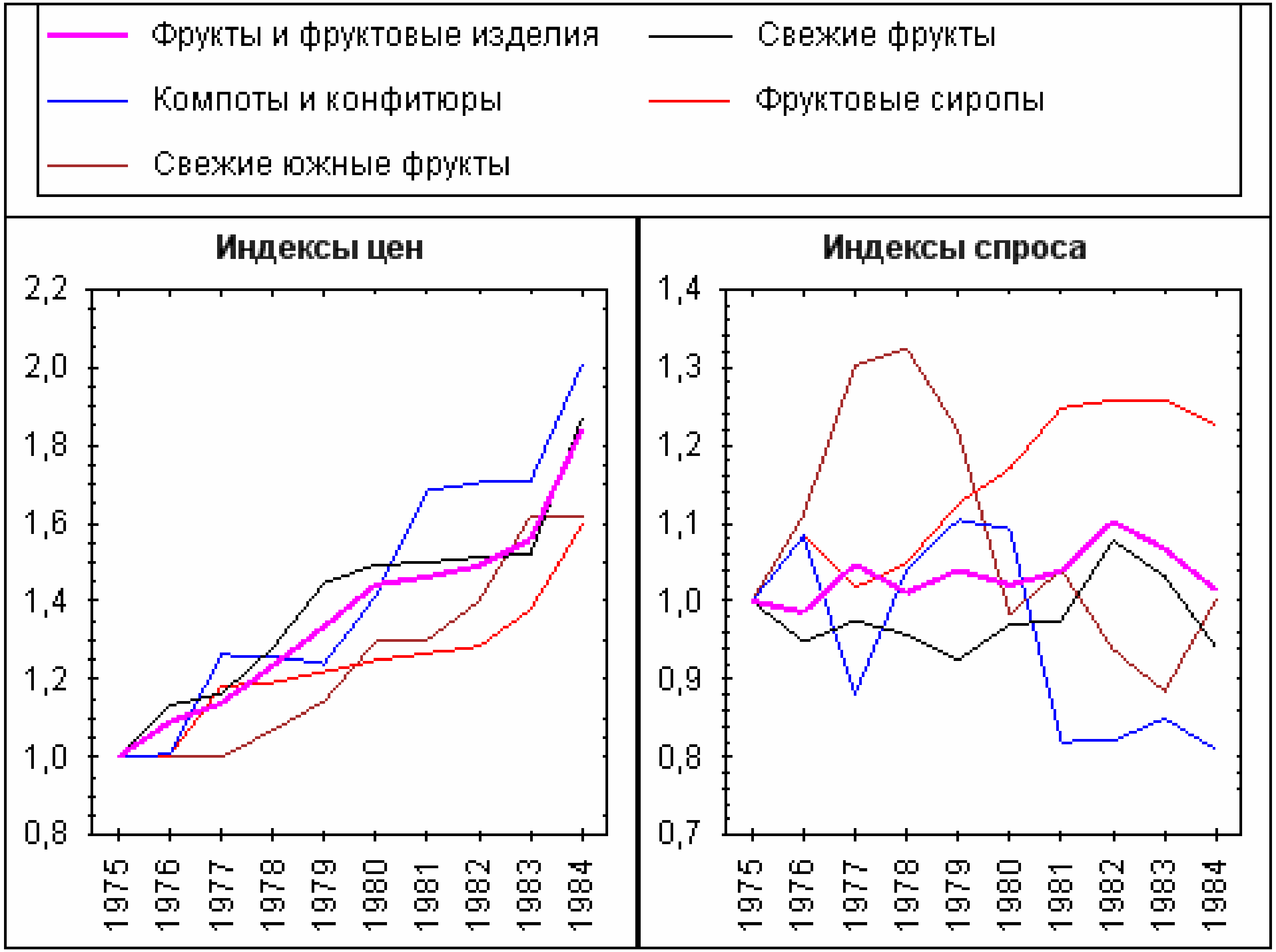
Колебания агрегированного индекса сглажены по сравнению с исходными данными



Индексы цен и потребления. Пример: Венгрия 1975-1984. Мясо



Индексы цен и потребления. Пример: Венгрия 1975-1984. Фрукты и фруктовые изделия

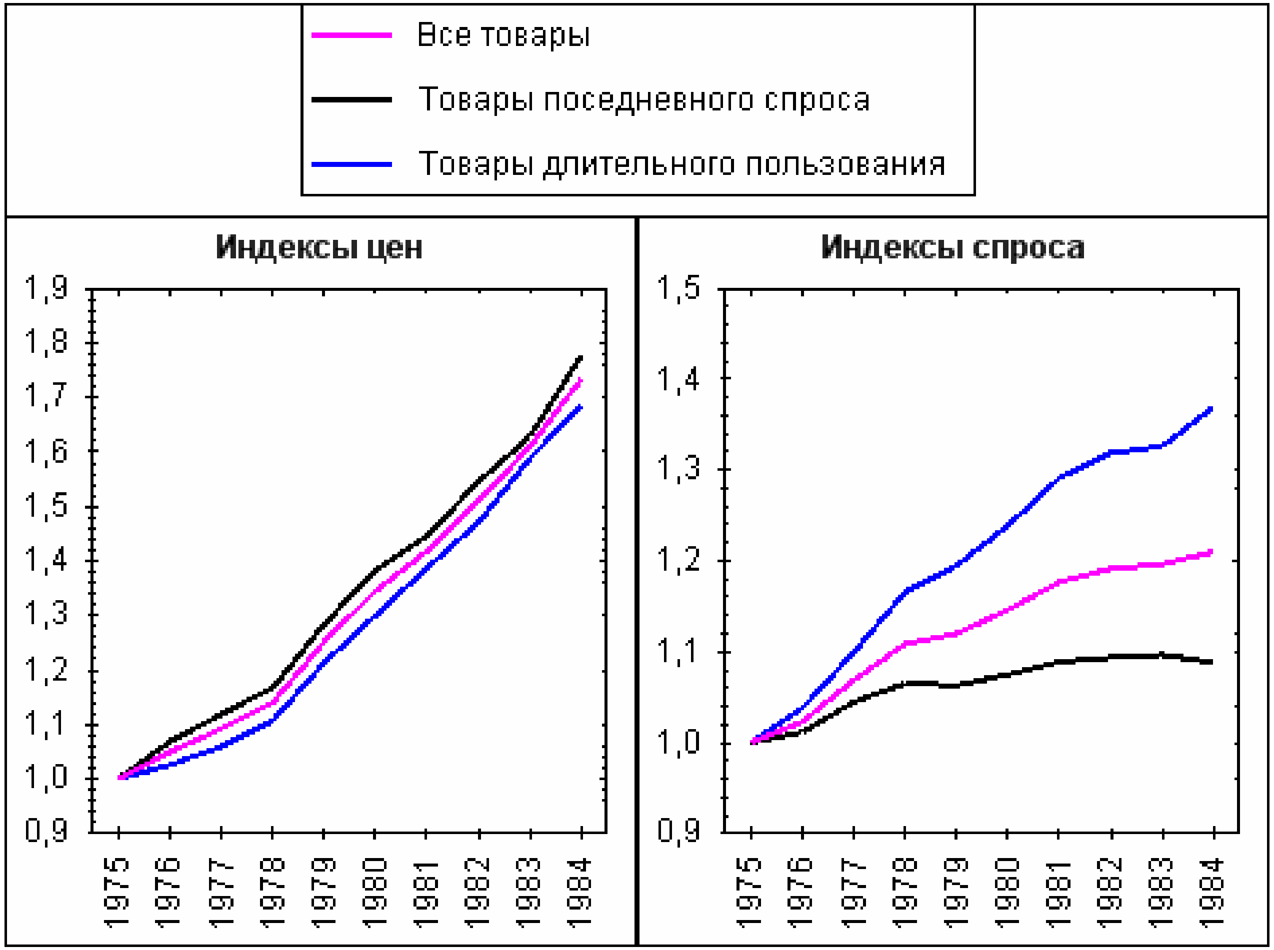


Венгрия: классификация товаров

Номер	Группа	Кол-во товаров
1	Продовольственные товары	49
2	Напитки	15
3	Табачные изделия	3
4	Одежда	31
5	Жилищное обслуживание	5
6	Отопление, энергия в быту	12
7	Бытовое оснащение	30
8	Здравоохранение, гигиена	7
9	Транспорт, информация	11
10	Образование, культура, спорт, отдых	23
11	Прочие статьи потребления	10

Товарные группы различаются длительностью службы товаров. Первые три класса – товары повседневного спроса – имеют время потребления 1-3 месяца, «Одежда» – около года, оставшиеся классы – 5-10 лет (товары и услуги длительного пользования).

Изменение структуры потребления



- Переход от плановой экономики к рыночной;

- Сдвиг потребления в пользу товаров длительного пользования;

Дерево экономических индексов

$$\mathbf{X} = (\chi_1, \dots, \chi_k, \varsigma) \geq 0$$

$$\chi_i = (X_{i_1}, \dots, X_{i_{k_i}}) : \exists \; F_i(\chi_i) \in \Phi_0$$

$\varsigma = (X_{j_1}, \dots, X_{j_z})$ – все остальные товары

$$\mathbf{F(X)} = \mathbf{F}\left(F_1(\chi_1), \dots, F_k(\chi_k), \varsigma\right)$$

$$// \; F_i(\chi_i) = F_i\left(F_{i1}(\chi_{i1}), \dots, F_{il}(\chi_{il}), \varsigma_i\right)$$

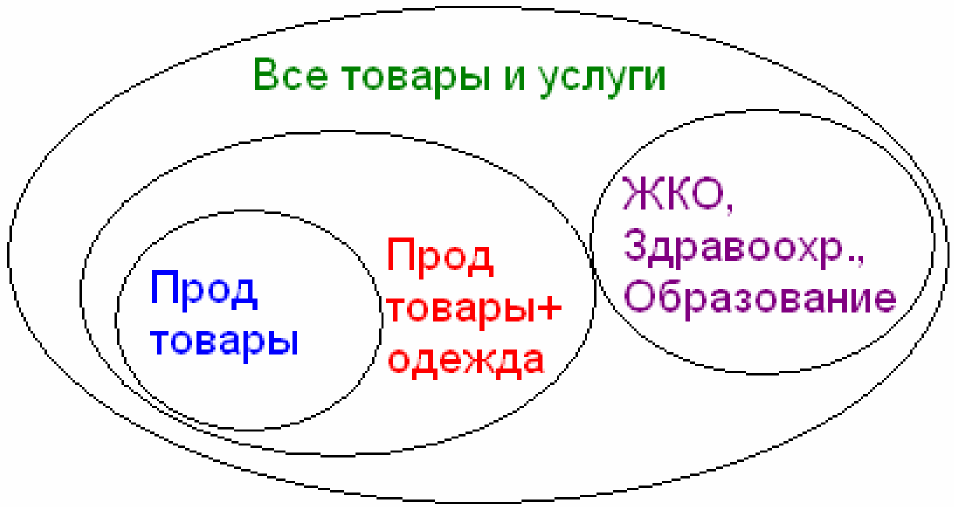
Анализ структуры потребительского спроса. Пример дерева

- Все товары
  - Прод товары
    - Фрукты и фруктовые изделия
    - Мясо
  - Напитки
  - Товары повседневного спроса
    - Прод товары
      - Фрукты и фруктовые изделия
      - Мясо
    - Напитки
  - Товары длительного пользования
  - Медицина,транпорт,образование
  - ЖКЗ,медицина,транпорт,образование
  - Товары длительного пользования+одежда
  - Товары повседневного спроса+одежда
    - Напитки
    - Фрукты и фруктовые изделия
    - Мясо

Статистика Венгрии. Отделимость

- Классификация, используемая товароведами, оказалась неадекватной;
- Процессам, которые происходили в стране, соответствует другая классификация, основанная на характерном времени потребления;

•Группа товаров "Одежда" не удовлетворяет ОСА, но удовлетворяет ОСА, если добавить еще один агрегированный товар "Продукты питания".



Статистика Нидерландов

- Из групп, выделенных товароведами, ни одна не интегрируется. Условия отделимости изучать невозможно.

Обобщенный непараметрический метод

Обобщение непараметрического метода:

$$\omega\lambda_\tau < P^\tau, X^t > \geq \lambda_t < P^t, X^t >, \quad \tau, t = \overline{0, T} \qquad \text{(III)}$$

Минимальное $\omega \geq 1$, при котором разрешима система, называется показателем нерациональности торговой статистики.

Предложение 7. *A и B – непересекающиеся группы товаров. Известно, что*

1) A: $\{X^t, P^t\}$ *рационализируема с* $\omega_1 \geq 1 \Rightarrow \exists \Sigma^t, \Pi^t$ — *индексы;*

2) B: $\{Y^t, Q^t\}$. *Торговая статистика* $\{\Sigma^t, Y^t, \Pi^t, Q^t\}$

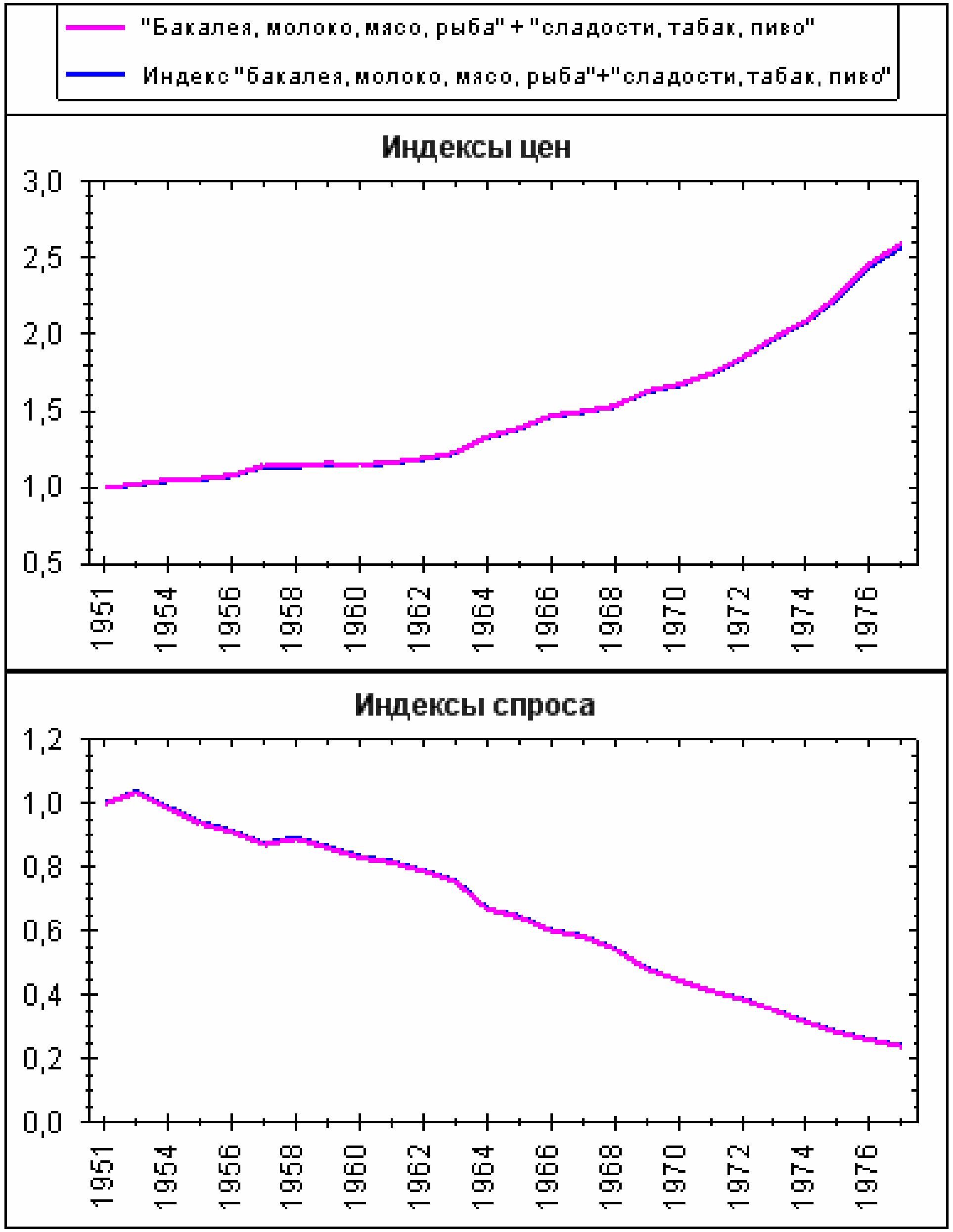
рационализируема с $\omega_2 \geq 1$.

Тогда группа AB с торговой статистикой $\{X^t, Y^t, P^t, Q^t\}$

рационализируема с параметром, не превышающим $\omega_1\omega_2$

Статистика Нидерландов. ОНМ.

- Товарная группа Бакалея,Молоко,Мясо,Рыба и Сладости,Табак,Пиво (на рисунке синим) интегрируется;
- При $\omega = 1.0003$ интегрируется группа Бакалея,Молоко,Мясо,Рыба;
- При $\omega = 1.001$ интегрируется группа, составленная из товаров Сладости,Табак,Пиво и индекса Бакалея,Молоко,Мясо,Рыба (на рисунке розовым),
- Максимальное отклонение индексов, построенных двумя способами, составляет 0.85%.
- ОНМ позволяет исследовать отделимость

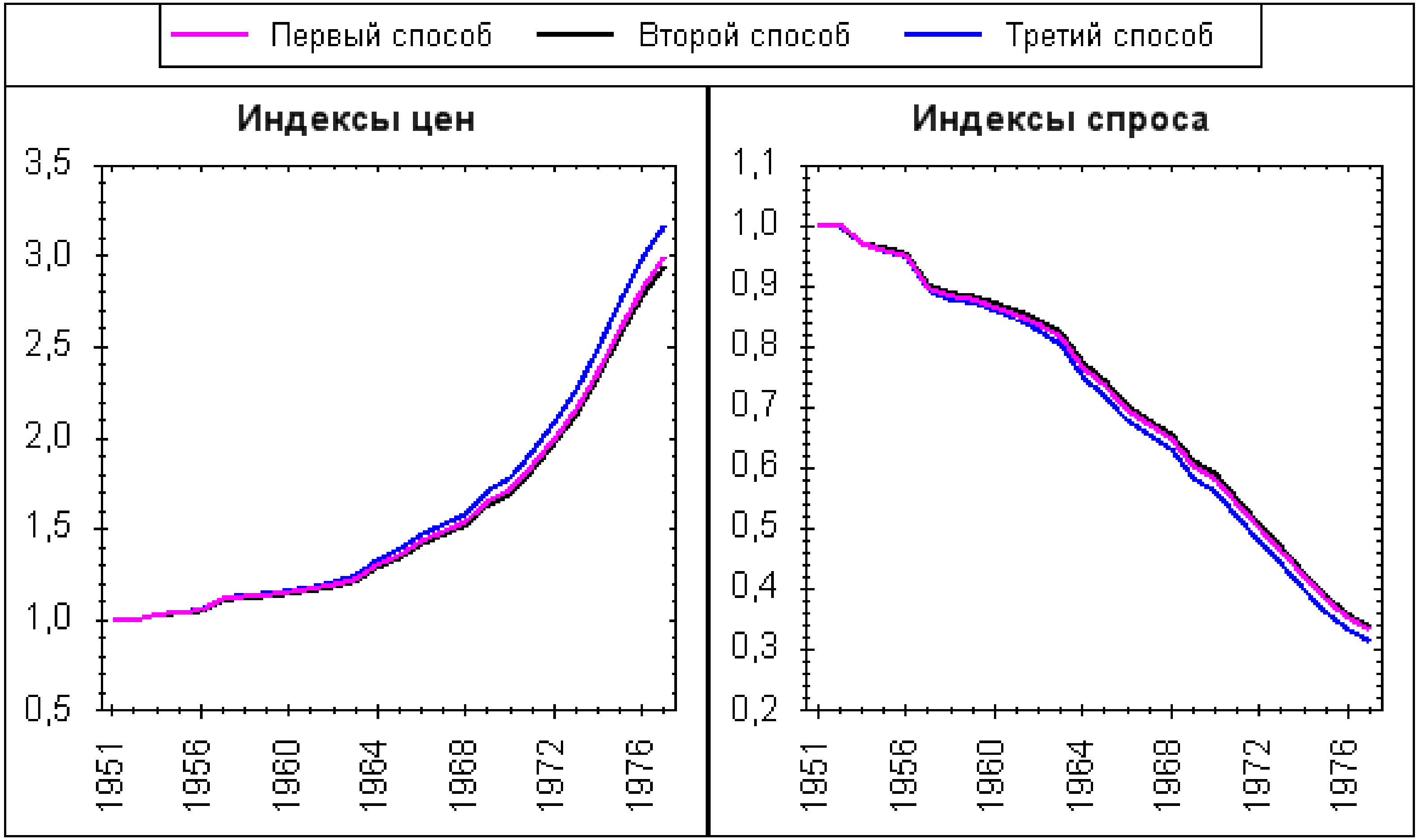


Анализ дерева индексов с помощью ОНМ

При использовании ОНМ у нас появляется возможность проверить, насколько предварительная обработка с вычислением индексов цен Ласпейреса и спроса Пааше, влияет на интегрируемость. Действительно, мы можем вычислить индекс тремя способами:

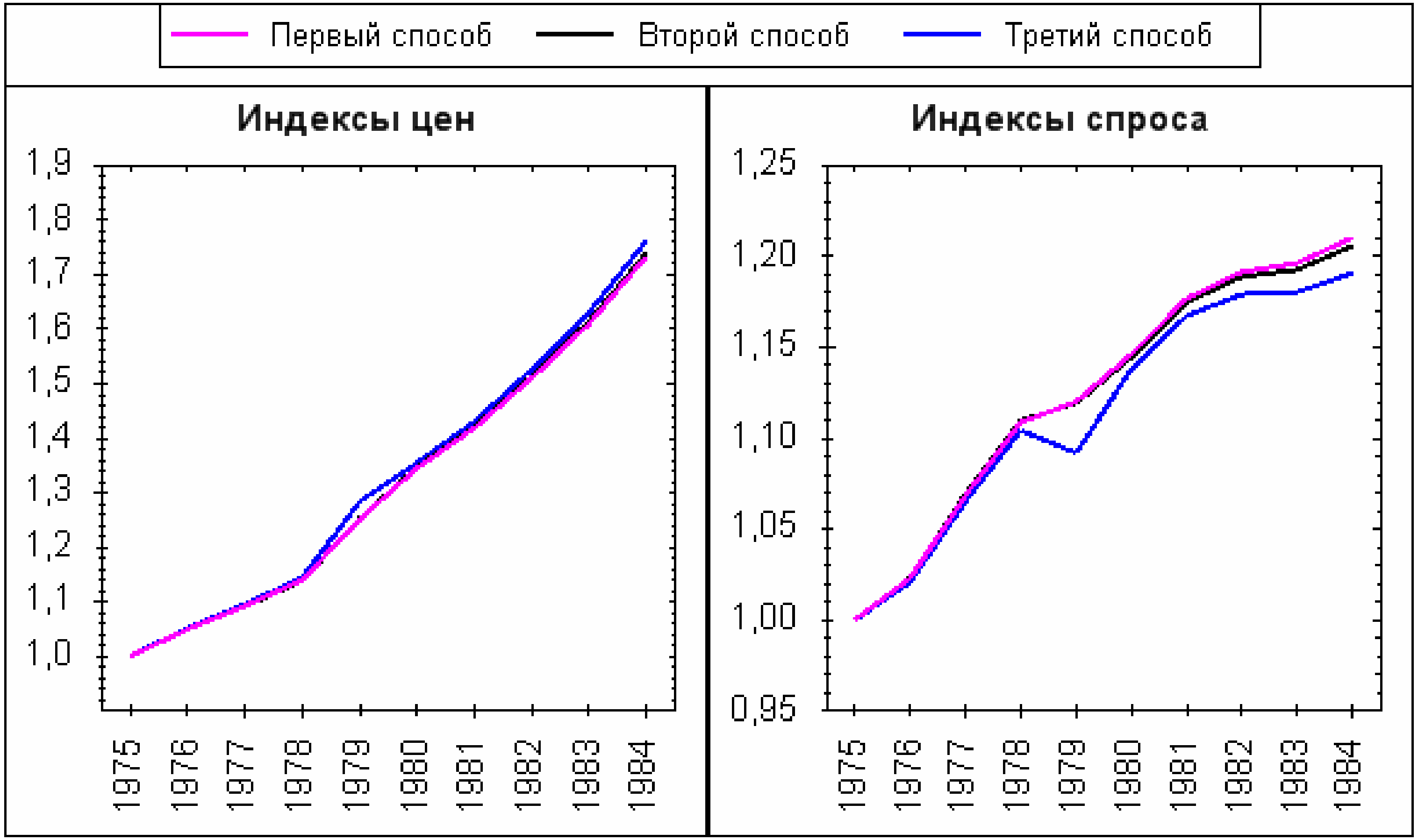
- Посчитать напрямую по всем товарам торговой статистики.
- С предварительным агрегированием по группам, т.е. рассчитать сначала индексы Конюса-Дивизиа для групп из классификатора, а затем построить индекс всей статистики.
- С предварительным агрегированием по группам, но при этом рассчитывая для групп индекс цен Ласпейреса и спроса Пааше, т.е. имитируя обработку, которая обычно производится статистическими службами.

Анализ дерева индексов с помощью ОНМ. Нидерланды.



Анализ дерева индексов с помощью ОНМ. Венгрия. Классификация статистических служб

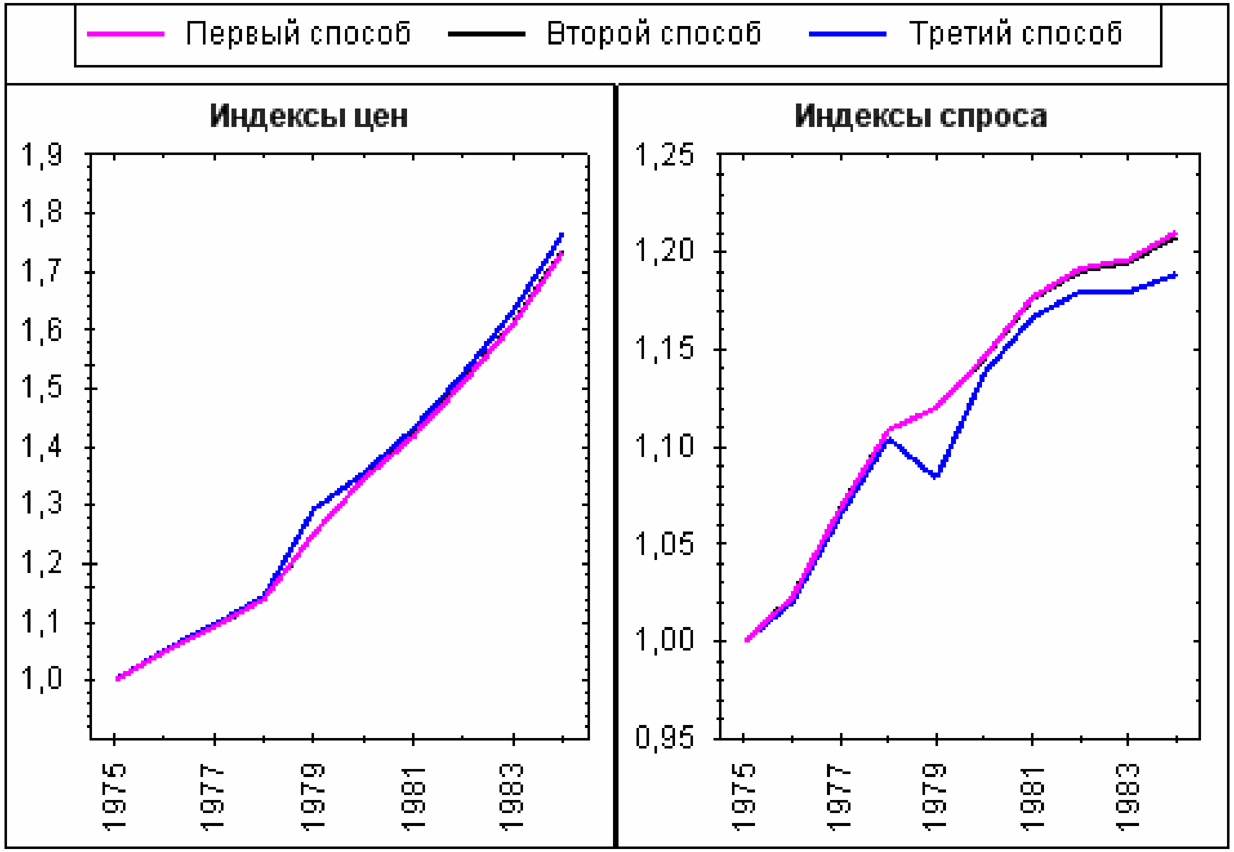
Для расчетов использована классификация статистических служб: Продтовары, Напитки, ЖКХ, Медицина и т.д.



Анализ дерева индексов с помощью ОНМ. Венгрия.

Классификация по времени потребления

Для расчетов использована классификация по характерному времени потребления: товары повседневного спроса и товары длительного пользования



Анализ дерева индексов с помощью ОНМ. Вывод

На всех графиках отклонение графиков, построенных по первому и второму способам, меньше, чем по первому и третьему. Таким образом, можно утверждать, что агрегирование с построением для групп товаров индексов Конюса-Дивизиа в большей степени отражает структуру потребительского спроса.

Первичная статистика. Безалкогольные напитки.

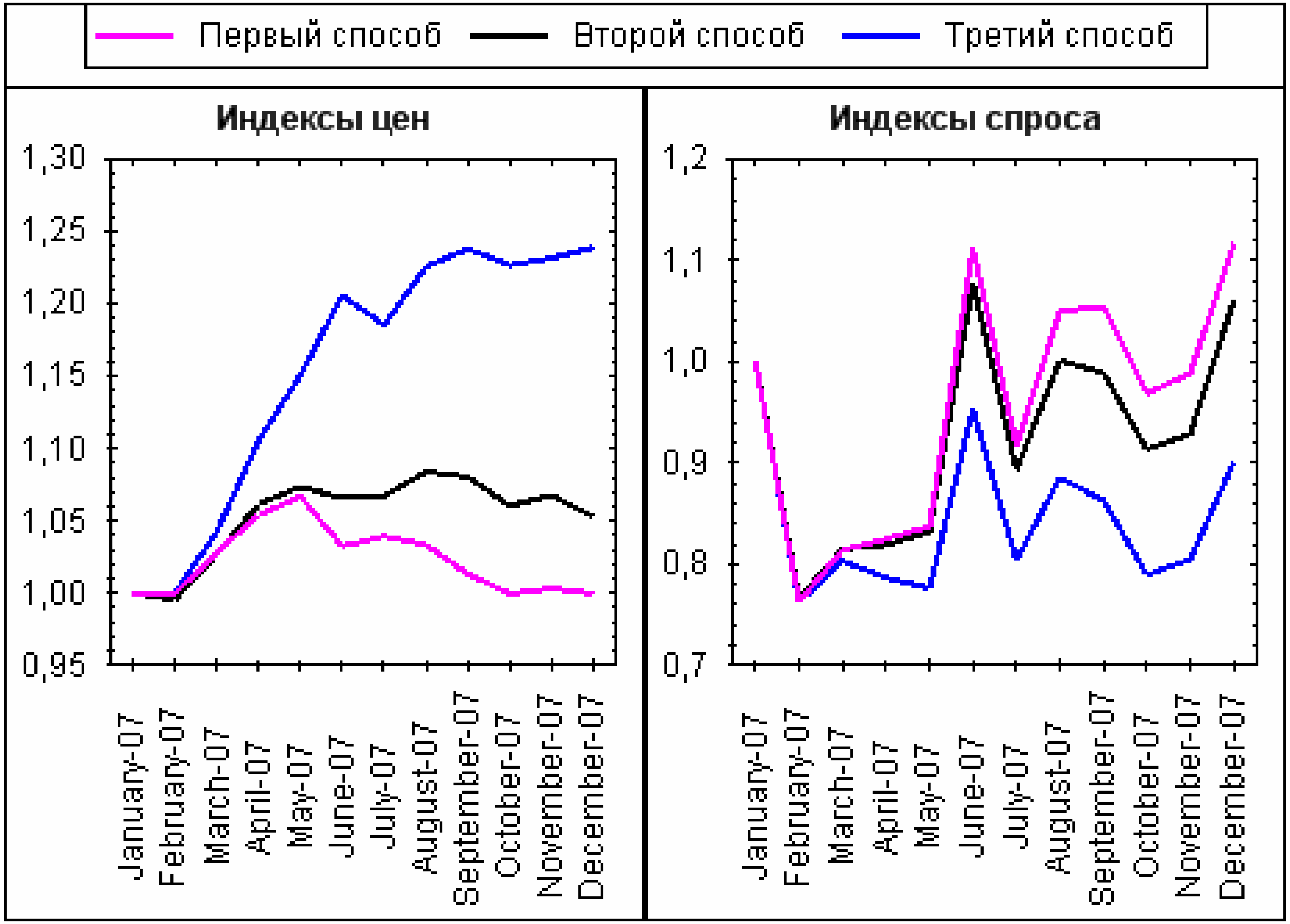
Статистика содержит помесячные данные (январь 2007 - декабрь 2007) о продажах безалкогольных напитков в 643 магазинах г. Москвы.

№	Название класса	ω
	Все товары	1.0
1	магазин 12	1.0
2	магазин 30	1.0
…	…	…
161	магазин 350	1.0
162	магазин 36	1.00003
163	магазин 21	1.00006
…	…	….
197	магазин 258	1.00048
198	магазин 227	1.00051
199	магазин 114	1.00054
…	…	…
218	магазин 519	1.00095
219	магазин 327	1.00101
…	…	…
643	магазин 22	1.07729

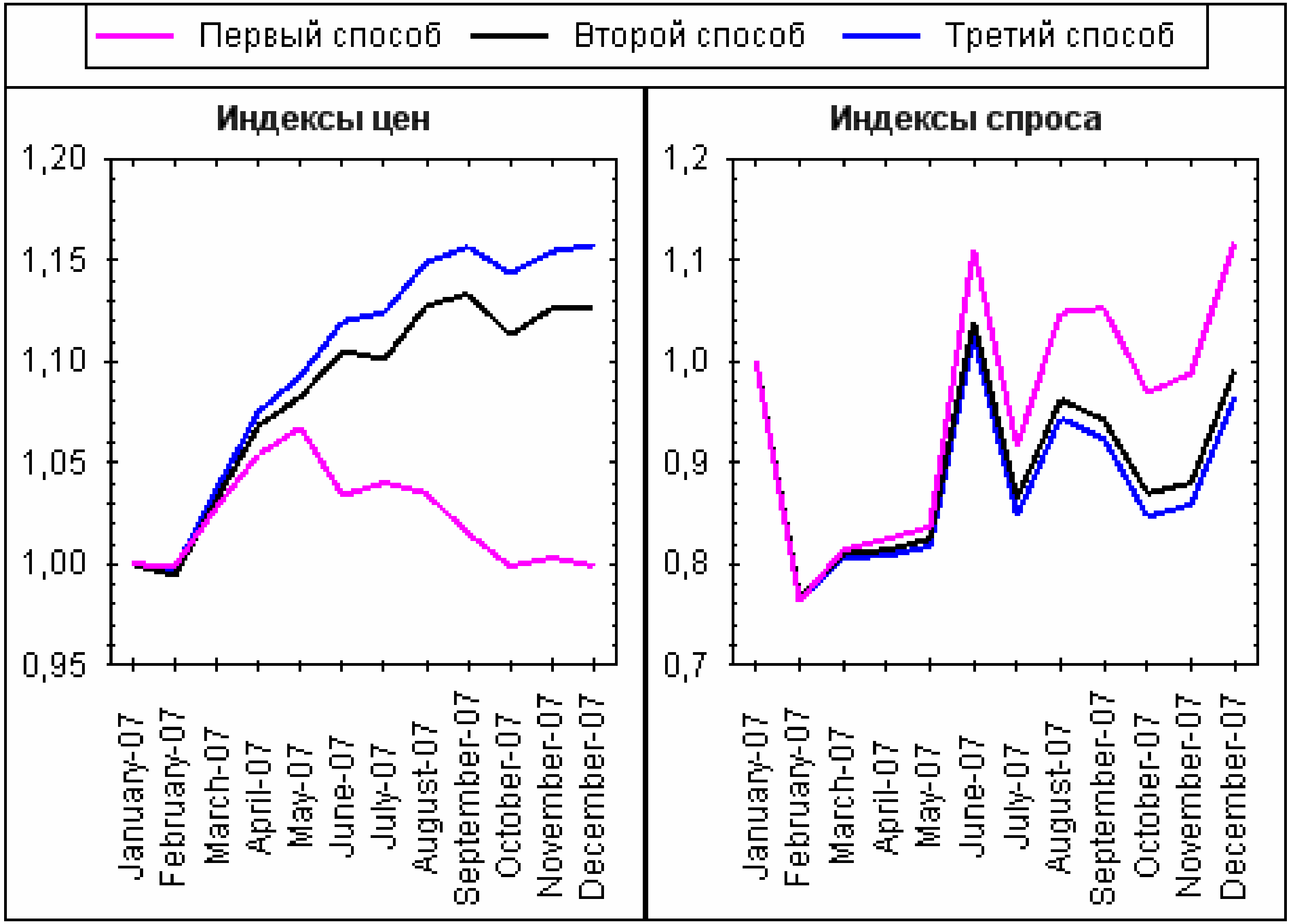
№	Название класса	ω
	Все товары	1.0
1	Coca-Cola 0.5 л	1.0
2	Coca-Cola 0.33 л	1.0
3	Coca-Cola 1 л	1.0
4	Coca-Cola 2 л	1.0005
5	Coca-Cola Light 2 л	1.0
6	Coca-Cola Light 1 л	1.0
7	Coca-Cola Light 0.5 л	1.0
8	Pepsi-Cola 1.25 л	1.0
9	Pepsi-Cola 0.33 л	1.0
10	Pepsi-Cola 0.6 л	1.0
11	Pepsi-Cola Light 0.6 л	1.0
12	Pepsi-Cola Light 2 л	1.0
13	Pepsi-Cola Light 1.25 л	1.0
14	Pepsi-Cola 2.5 л	1.0

- Вывод: выявлена сегментация по брендам.

Безалкогольные напитки. Анализ дерева индексов. Сегментация по брендам



Безалкогольные напитки. Анализ дерева индексов. Сегментация по магазинам



Первичная статистика. Компьютерное оборудование

- Наименьший показатель нерациональности имеет группа "Все товары";
- Неспособность большинства покупателей адекватно оценить товар из-за сложности технического устройства и обилия характеристик, список которых непрерывно меняется;
- Покупатель, возможно, не разбираясь детально в характеристиках, в целом имеет четкое представление о том, что он хочет купить.

Наименование	$\omega_{\min}$	**Наименование**	$\omega_{\min}$
Все товары	1,0082	Дискеты и диски	1,0314
Расходные материалы	1,0089	Сканеры	1,0322
Сетевое оборудование	1,0109	Память	1,0337
Принтеры	1,0115	Колонки	1,0363
Процессоры	1,0163	Мониторы	1,0373
Звуковые карты	1,0181	Видеокарты	1,0527
Прочее	1,0183	Контроллеры	1,0889
Мыши	1,0202	Мат. Платы	1,1041
Клавиатуры	1,0223	Винчестеры	1,1730
Оргтехника	1,0242	Устройства охлаждения	1,2575
CD-ROM/ DVD/ Дисководы	1,0262		

Компьютерное оборудование. Объединение классов.

- Объединения классов имеют намного меньший показатель нерациональности, чем сами классы. Это связано с тем, что объединения полнее учитывают свойства взаимозаменяемости и взаимодополняемости. Хорошим примером служит то, что товары из класса "Память" образуют рационализируемую группу с "Процессорами" и "Сетевым оборудованием". Это иллюстрирует поведение потребителя: обычно покупатель приобретает память и процессор не по отдельности, а вместе, чтобы характеристики подходили друг к другу.

Наименование	$\omega_{\min}$
Память, Процессоры, Сетевое оборудование	1
Колонки, Память, Процессоры	1,00007
Звуковые карты, Память, Процессоры	1,00018
Контроллеры, Память, Процессоры	1,00047
Память, Процессоры	1,00058
Устройства охлаждения, Память, Процессоры	1,00074
Видеокарты, Процессоры, Сетевое оборудование	1,00096
Память, Процессоры, Прочее	1,00083
Память, Процессоры, Расходные материалы	1,001

Статистика фондового рынка

- P_t - цены акций, X_t - объемы торгов в штуках
- 21 крупнейшая мировая биржа:
  – Нью-Йорксая фондовая биржа, Лондонская фондовая биржа,
  – Фондовая биржа Токио,
  – Фондовая биржа Франкфурта,
  – Фондовая биржа Гонконга,
  – Фондовая биржа Шанхая...

Проблемы:

- Разное число перепродаж крупных пакетов акций, различная активность спекулянтов влияет на рационализируемость;
- Биржи торгуются в разных валютах.

Приведение к одной валюте

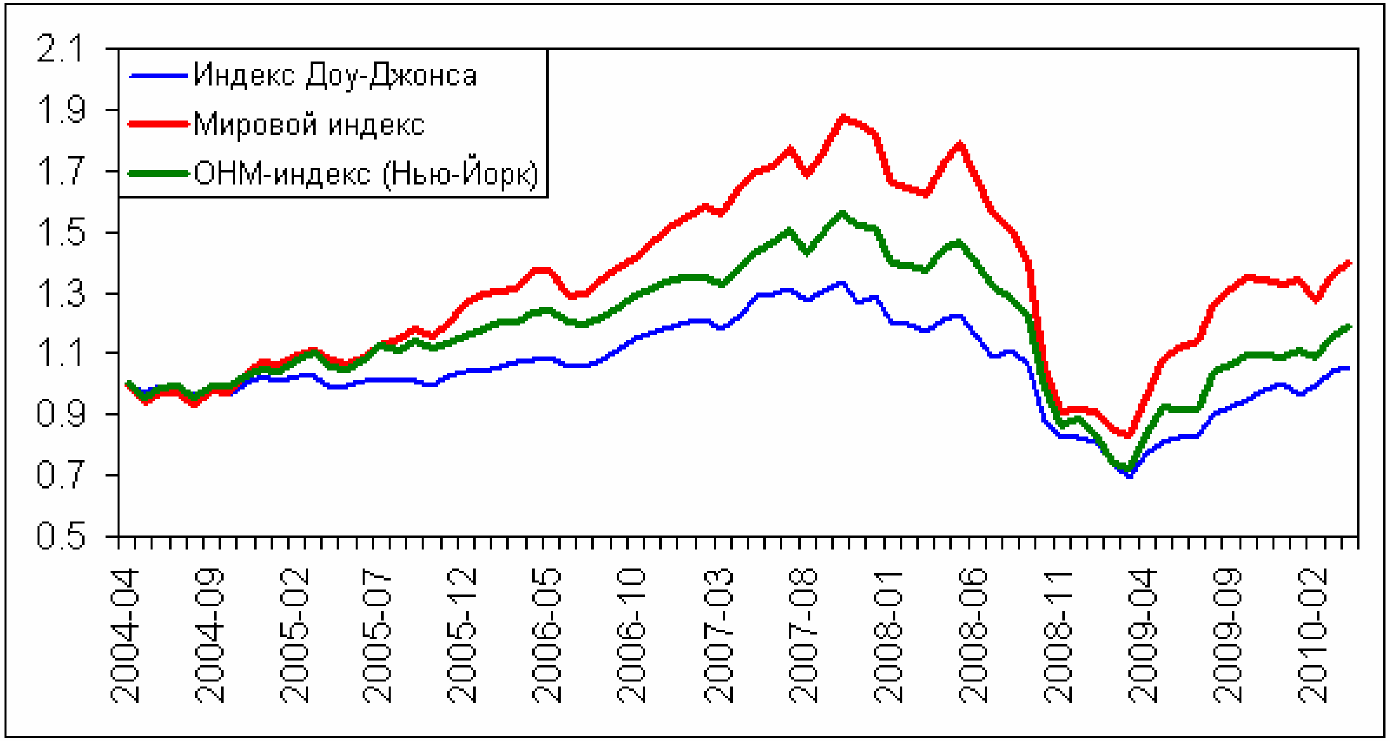
- Пусть a_{ij} - это количество валюты *j*, которое мы можем получить, обменяв единицу валюты *i*. Полученная матрица *A* называется матрицей кросс-курсов. Решив неравенства

$$a_{ij}\lambda_i \le \lambda_j, \lambda_i > 0$$

получим «веса» валют λ_i. Умножая решение на одно и то же положительное число, мы снова получим решение. Положим «вес» доллара США равным единице.

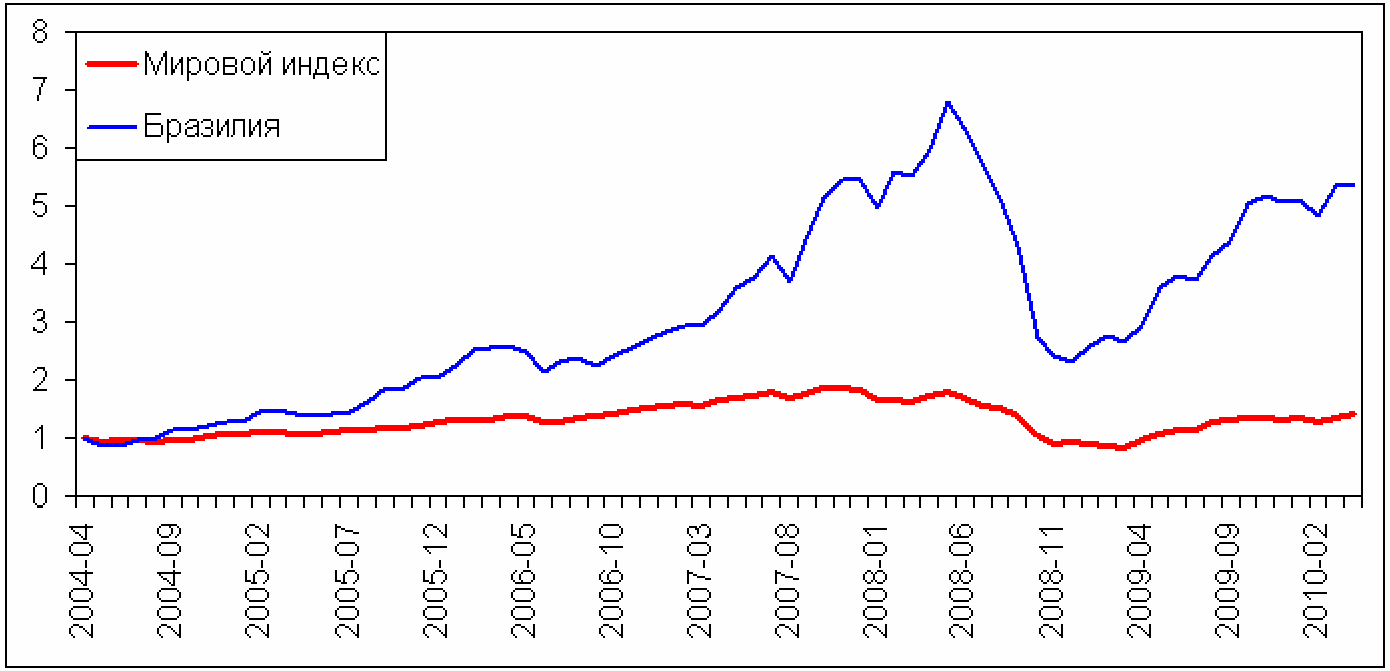
Мировой индекс и Нью-Йорк

- Мировой индекс более волатилен, чем индекс для Нью-Йоркской фондовой биржи, который в свою очередь более волатилен, чем индекс Доу-Джонса.



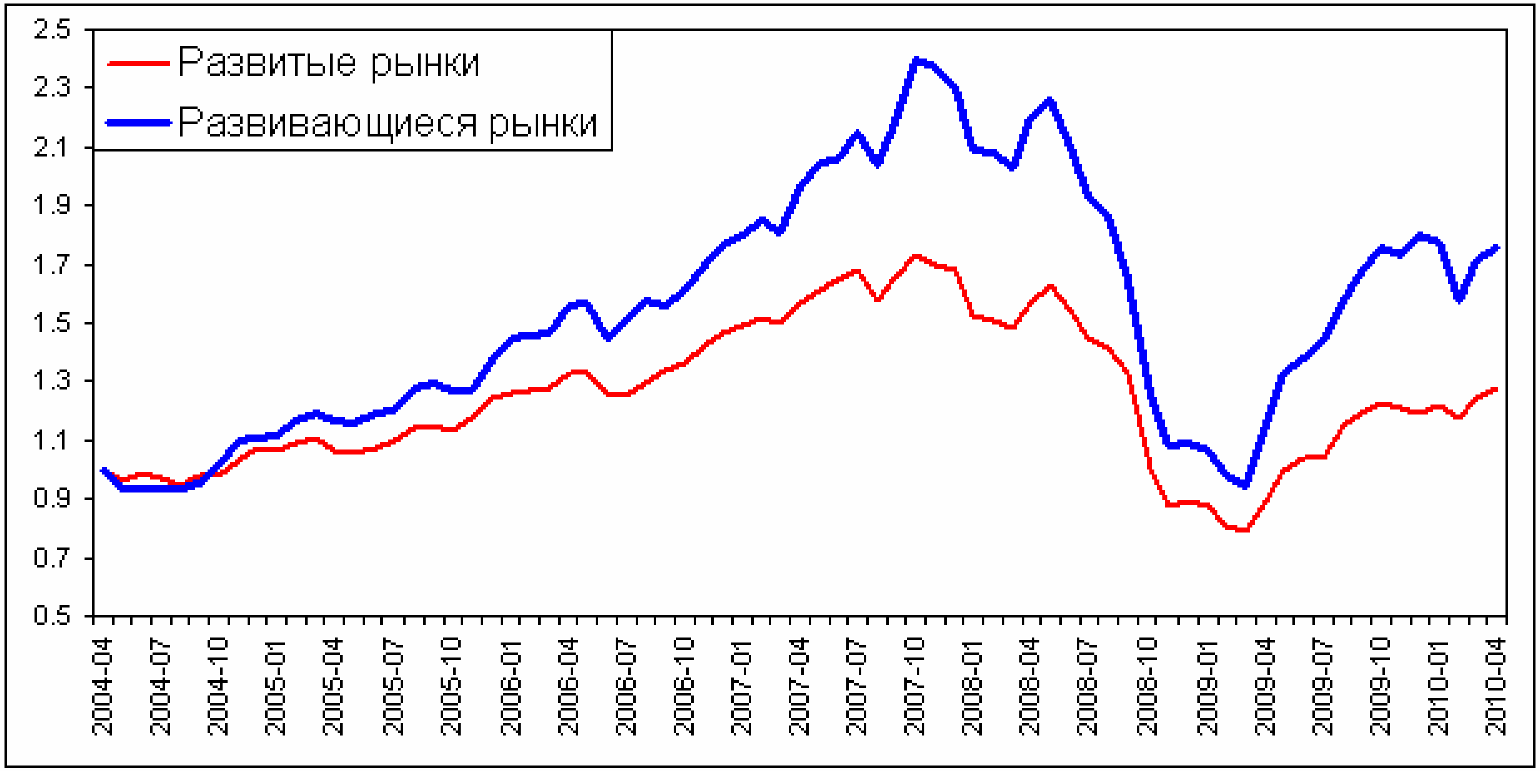
Бразилия

- Бразильский рынок обладает очень высокой волатильностью. Например, по сравнению с мировым индексом.



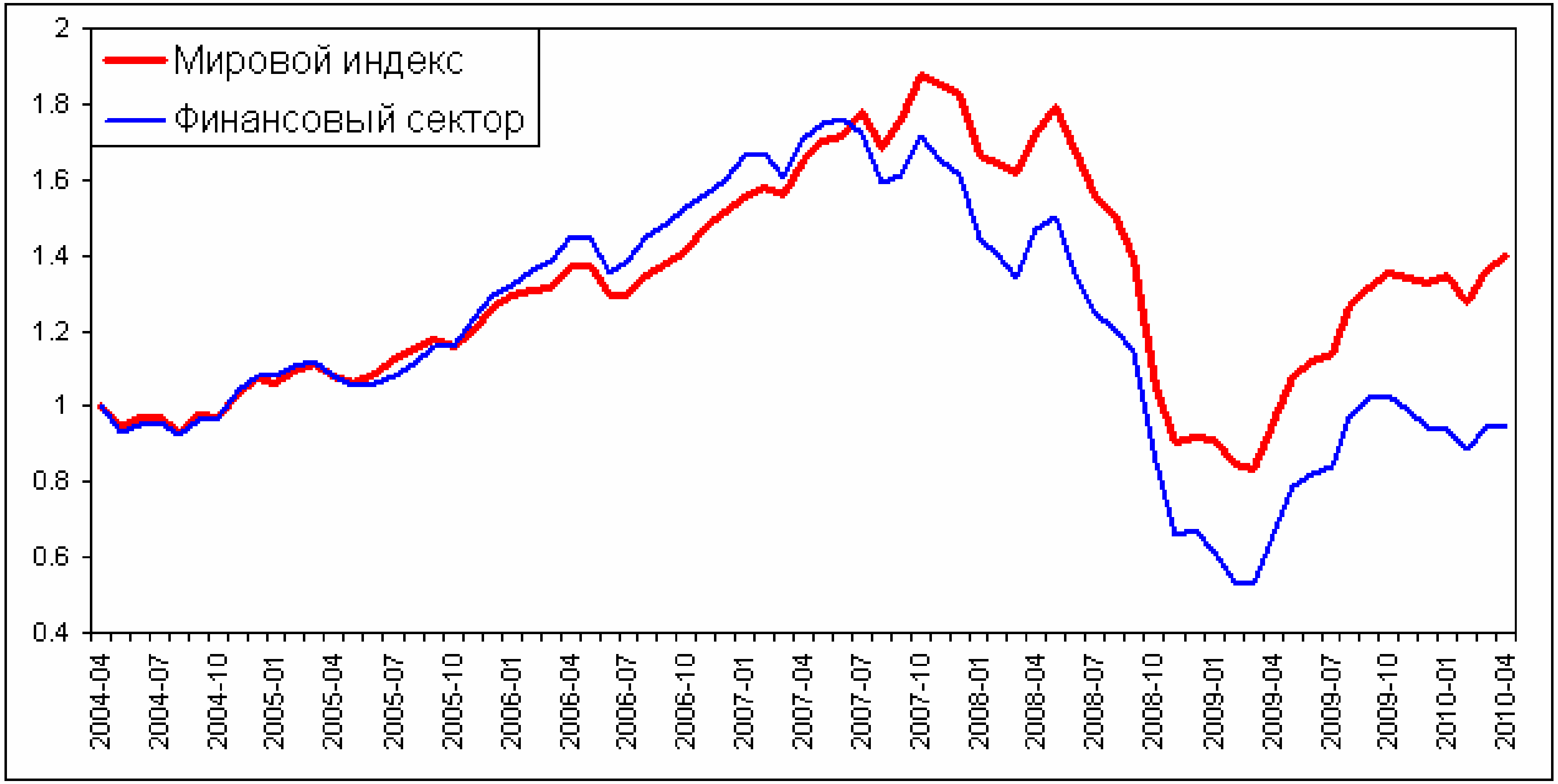
Развитые и развивающиеся рынки

- В целом развивающиеся рынки более волатильны.



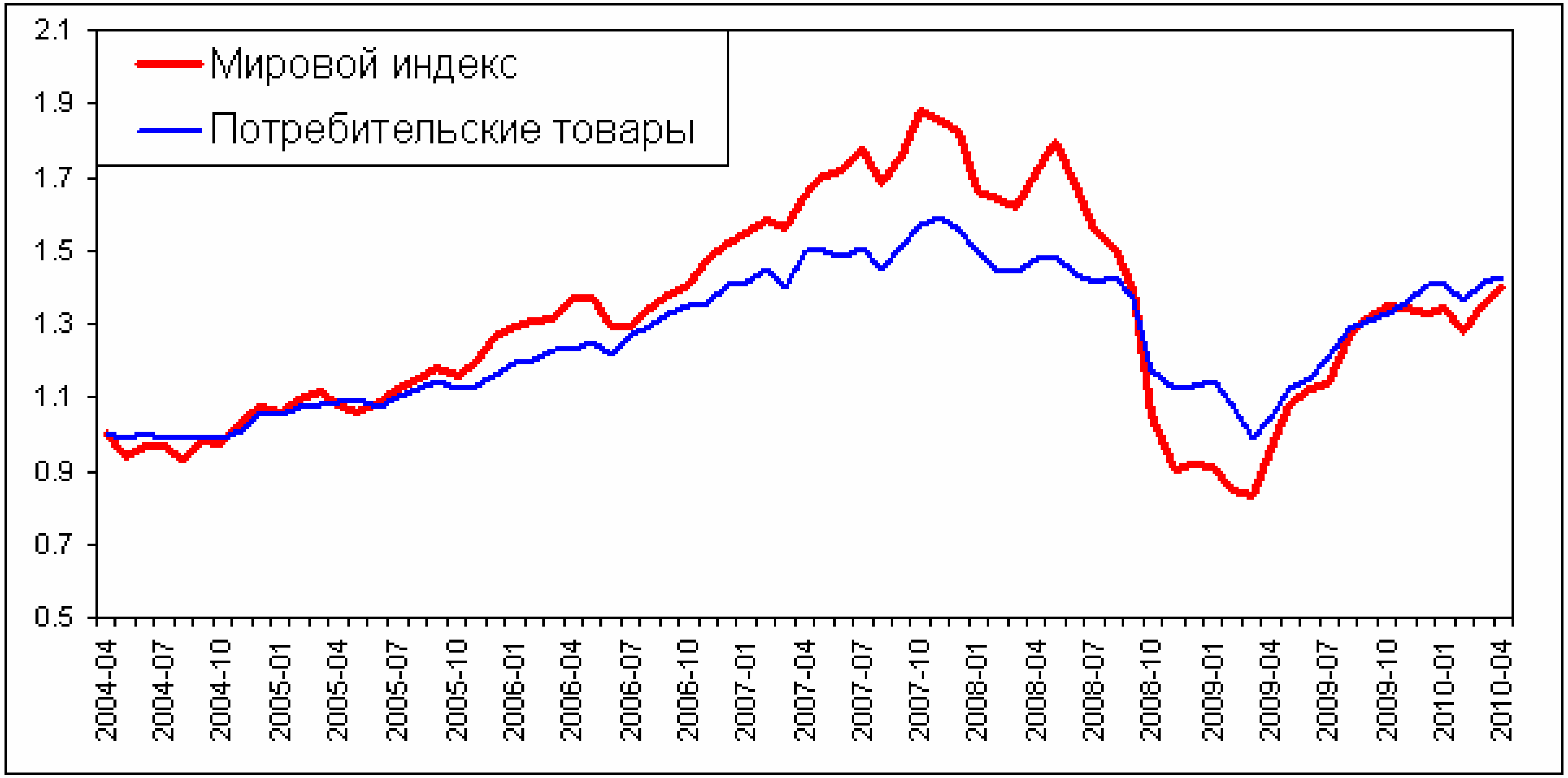
Финансовый сектор

- ОНМ позволяет строить индексы по отраслям. Анализ показал, что наиболее сильно от кризиса 2008 года пострадал финансовый сектор.



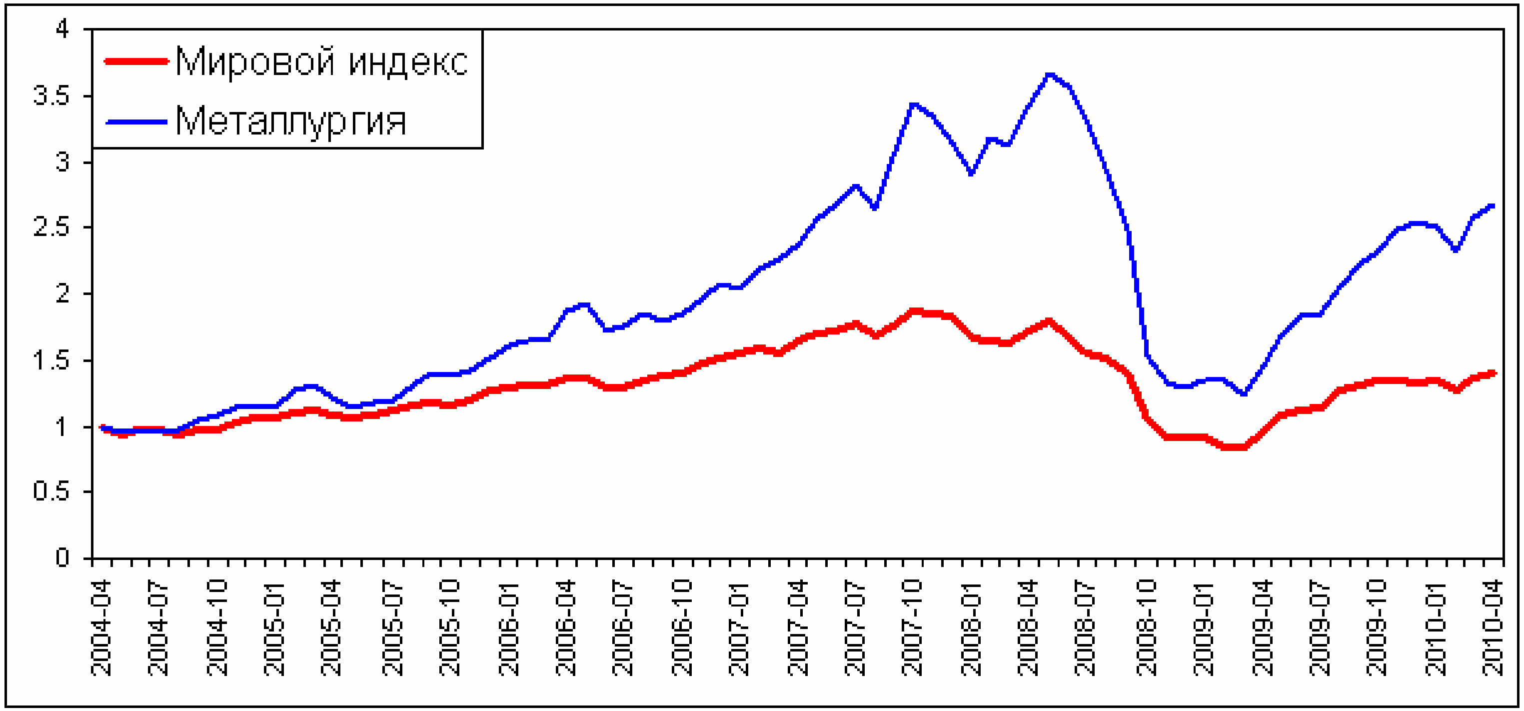
Компании-производители потребительских товаров

- Компании-производители потребительских товаров оказали стабилизирующее влияние на рынок.



Металлургия

- Металлургические компании продемонстрировали наибольший рост перед кризисом.



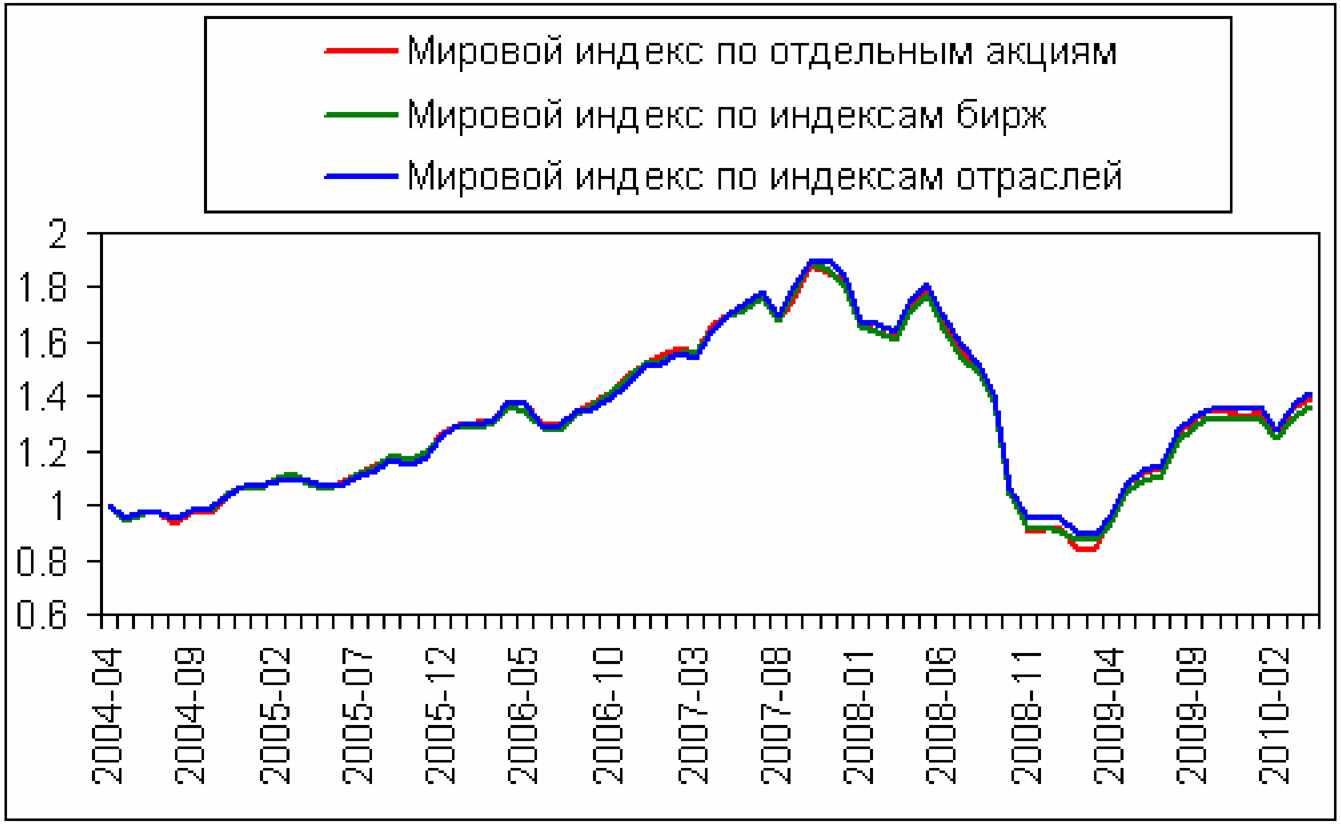
Рационализируемость

- Показатель нерациональности наименьший для всего мирового рынка.

Мировой фондовый рынок с агрегированием по отраслям	1.0108
Мировой фондовый рынок с агрегированием по биржам	1.0208
Мировой фондовый рынок	1.0212
США (NYSE)	1.0232
Финансовый сектор	1.0264
Металлургия	1.0727
Бразилия	1.0966
Компании-производители потребительских товаров	1.1229

Отделимость

- Индексы, построенные по индексам отраслей, по индексам отдельных бирж и по акциям почти совпадают.

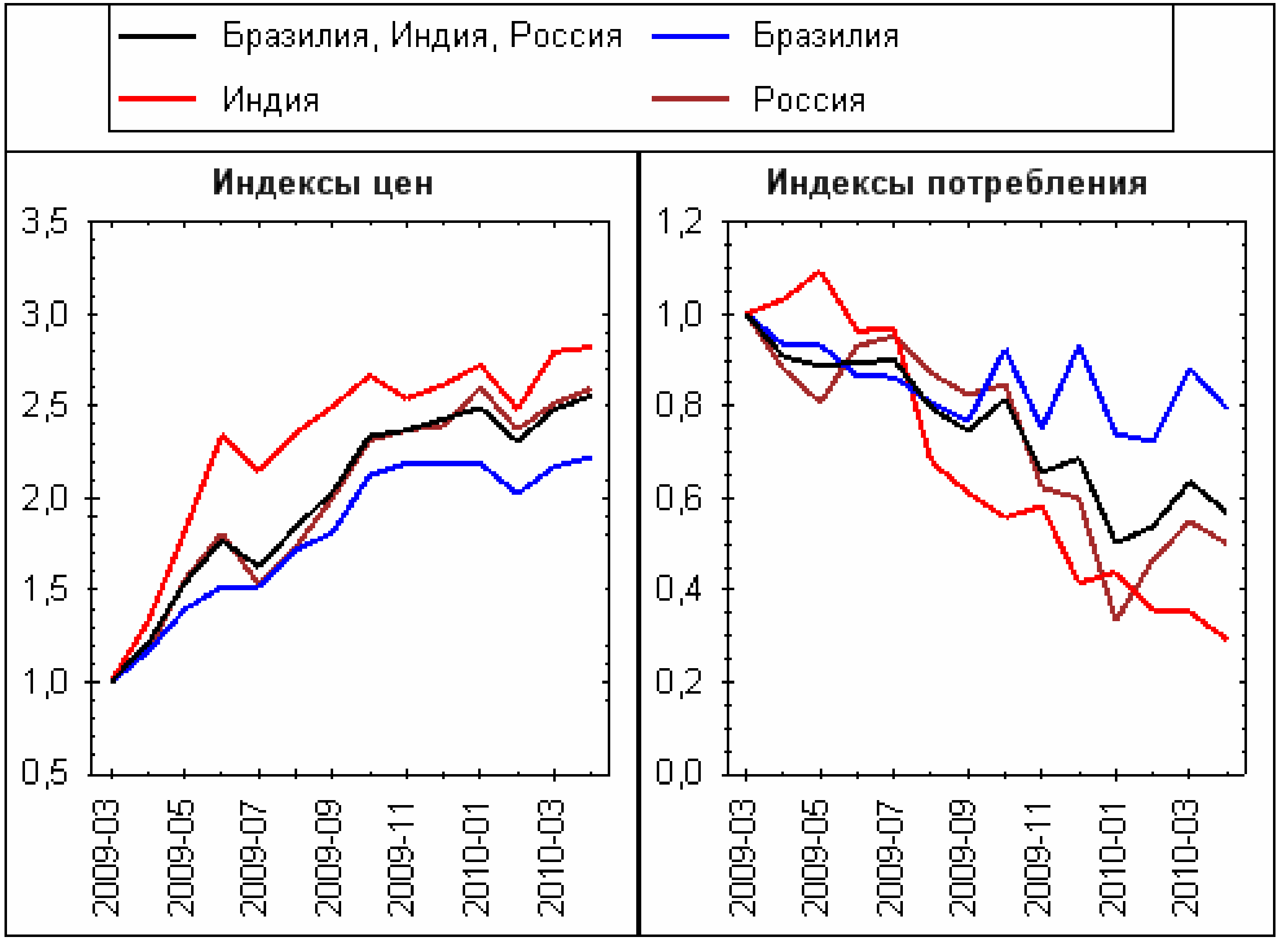


BRIC. Рационализируемость

Группа	**Омега**
Бразилия+Россия	1.0194
Бразилия+Индия+Россия	1.023
Бразилия	1.024
Китай	1.032
Россия	1.033
BRIC	1.045
Индия	1.059

BRIC. Индексы

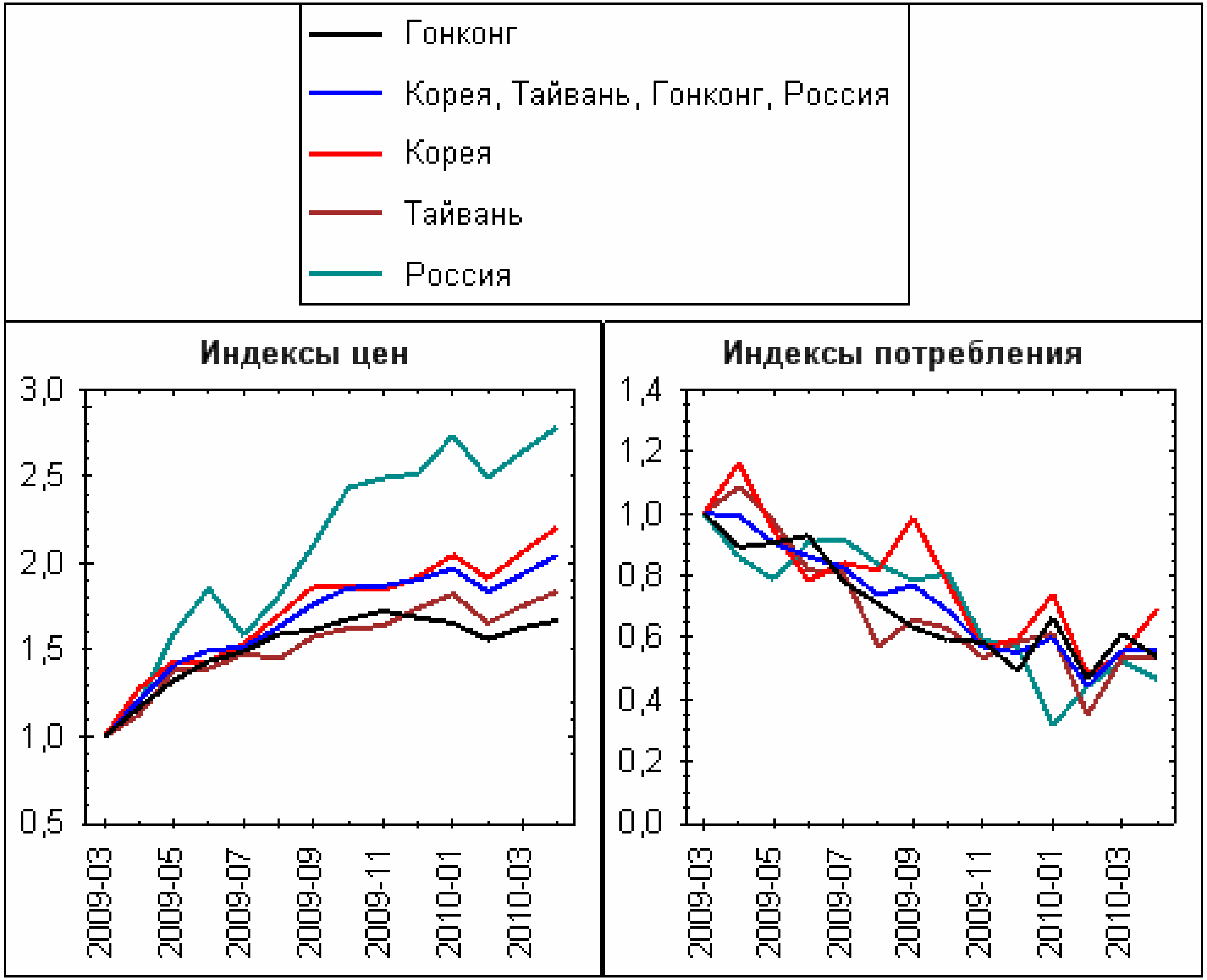
- Индекс для объединения демонстрирует более усредненное и инерционное поведение, чем индексы для отдельных бирж.



"Азиатские тигры". Рационализируемость

Группа	**Омега**
Гонконг+Россия	1.0036
Гонконг	1.005
Корея+Тайвань+Гонконг+Россия	1.0086
Корея	1.011
Корея+Тайвань+Гонконг	1.014
Япония	1.015
Тайвань	1.031
Россия	1.033
Индия	1.059

"Азиатские тигры" . Индексы



Неоклассическая модель потребительского поведения

---

m – *количество социальных групп*

$u_\alpha(X) \in U_m, \quad \alpha = \overline{1,m}$ – *функции полезности этих групп*

I_α – *доходы групп,* $\quad I = \sum_{\alpha=1}^{m} I_\alpha$

$$u_\alpha(X) \to \max, \qquad \alpha = \overline{1,m}$$

$$\langle P, X \rangle \le I_\alpha, \qquad X \ge 0$$

$q_\alpha(P) = \inf\limits_{\{X \ge 0 | u_\alpha(X) > 0\}} \dfrac{\langle P, X \rangle}{u_\alpha(X)}$ – *индекс цены группы*

$\varphi_\alpha(P) = {I_\alpha}/{I}$ – *доли доходов групп*

$Q(q)$ – *индекс цен,* $\quad F(X)$ – *индекс продукта*

$W(u) = \inf\limits_{\{q \ge 0 | Q(q) > 0\}} \dfrac{\langle q, u \rangle}{Q(q)}$ – *функция общественного благосостояния Бергсона*

Неоклассическая модель потребительского поведения

Суммарный спрос

$$X(p)\,dp = \sum_{\alpha=1}^{M} \frac{\varphi_\alpha(p)}{q_\alpha(p)}\, dq_\alpha(p)$$

Неоклассическая модель потребительского поведения

Предложение. Пусть существуют F(X) и q(p) из класса U_m, рационализирующие функции спроса X(p). Тогда существует такая функция Ф(q), что q(p)=Ф(q(p)) и

$$\varphi_\alpha(p) = \frac{q_\alpha(p)}{\Phi\left(q(p)\right)} \frac{\partial \Phi\left(q(p)\right)}{\partial q_\alpha}$$

Функция общественного благосостояния Бергсона

$$W\left(u_1,\ldots,u_M\right)=\inf_{\left\{q\geq 0\,\middle|\,\Phi(q)>0\right\}}\frac{\sum_{\alpha=1}^{m} q_\alpha u_\alpha}{\Phi(q)}$$

Связь функции благосостояния Бергсона с индексом продукта

Утверждение 10. *Пусть* $Q(q) \in U_m$,

$$\varphi_\alpha(P) = \frac{q_\alpha(P)}{Q(q)} \frac{\partial Q(q)}{\partial q_\alpha}, \quad \alpha = \overline{1,m}.$$

Тогда индекс продукта $F(X)$ *не меньше, чем оптимальное значение функционала в задаче*

$$\begin{cases} W\left(u_1(X^1),\dots,u_M(X^M)\right) \quad \to \quad \max, \\ X^1 + \dots + X^M = X, \quad X^\alpha \ge 0 \quad (\alpha = \overline{1,m}) \end{cases} \qquad (\#)$$

Если же X *является суммарным потребительским спросом общества при некотором* $P \ge 0$, *то* $F(X)$ *равно оптимальному значению функционала в задаче (#).*

Случай нарушения условий интегрируемости

$$\sum_{j=1}^{k} Q_j\left(P(X)\right)dF_j(X) = \sum_{i=1}^{m} P_i(X)dX_i$$

$$R\left(F(X)\right) = Q\left(P(X)\right)$$

Литература

[1] *Afriat S.N.* The construction of utility functions from expenditure data // International economic review, 1967, № 7, p. 67-77.

[2] *Varian H.* Non-parametric tests of consumer behavior // The review of economic studies, 1983, v.L(1), № 160 (1), p.99-100.

[3] *Шананин А.А.* Непараметрические методы анализа структуры потребительского спроса. // Мат. моделирование, № 9, 1993, с.3-16.

[4] *Houtman M.* Nonparametric consumer and producer analysis // Dissertation № 95-32, 1995, University of Limburg, Maastricht, the Netherlands.

[5] *Levin V.L.* Reduced cost function and their applications // J. of Math. Econ., 1997, v.28.

[6] *Петров А.А., Шананин А.А.* Об условиях существования агрегированных функций спроса. М.:Докл. АН, 1997, Т. 356, \No2, с.170-172

[7] *Поспелова Л.Я., Шананин А.А.* Показатели нерациональности потребительского поведения и обобщенный непараметрический метод // Мат. моделирование, № 4, 1998, с.105-116.

Литература

[8] *Шананин А.А.* Агрегирование конечных продуктов и проблема интегрируемости функций спроса.// М.: ВЦ АН СССР, 1986, 66 с.

[9] *Петров А.А., Шананин А.А.* Условия интегрируемости, распределение доходов и социальная структура общества. // Математическое моделирование, 1994, т.6, №8, с. 105-125.

[10] *Шананин А.А.* Об агрегации функций спроса. // Экономика и математические методы, 1986, т. 25, №6, с.1095-1105.

[11] *Тарасов С.П., Шананин А.А.* О гладкости функции полезности в теореме Африата - Вериана. // Докл. АН, 2003, т. 388, №1, с.19-22.

[12] *Вратенков С.Д., Шананин А.А.* Анализ структуры потребительского спроса с помощью экономических индексов. // М.: ВЦ АН СССР, 1991, 62 с.

[13] *Шананин А.А.* Проблема интегрируемости и обобщенный непараметрический метод анализа потребительского спроса. // Труды МФТИ, 2009, т.1, №4, с.84-98.

[14] *Кондраков И.А., Шананин А.А.* Обобщенный непараметрический метод. Применение к анализу товарных рынков. // Труды МФТИ, 2010, т.2, №3 (в печати)

[15] *Кондраков И.А., Поспелова Л.Я., Усанов Д.А., Шананин А.А.* Технологии анализа рынков на основе обобщенного непараметрического метода. // М.: ВЦ РАН, 2010, 67 с.

Спасибо за внимание!