Студенческая олимпиада ГУ-ВШЭ по математике
Демонстрационный вариант

1. Пусть n — число упорядоченных троек (A_1, A_2, A_3), состоящих из множеств A_1, A_2, A_3, таких, что

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\},$$
$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset.$$

Найдите разложение числа n на простые множители.

2. Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем действительных чисел. Суммой $A+B$ множеств $A, B \subset V$ называется множество всех векторов вида $a+b$, где $a \in A$, $b \in B$. Произведением множества $A \subset V$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется множество векторов вида λa, где $a \in A$. Докажите, что открытое множество A удовлетворяет условию

$$A + A = 2A$$

тогда и только тогда, когда A выпукло.

3. Сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}?$$

4. Пусть G — конечная группа, а $\alpha : G \to G$ — автоморфизм группы G, такой, что $\alpha(x) = x$ только если x является единичным элементом. Докажите, что всякий элемент группы G может быть представлен в виде $x^{-1}\alpha(x)$, где $x \in G$.

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ задан эллипсоид с главными полуосями a, b, c. Вокруг него произвольным образом описан прямоугольный параллелепипед (так, что эллипсоид касается каждой из граней параллелепипеда). Найдите длину главной диагонали параллелепипеда.