Олимпиада 9 класс

1. Известно, что число $a+\frac{1}{a}$ целое. Докажите, что число $a^2+\frac{1}{a^2}$ – тоже целое.

2. Сколько существует чисел от 1 до 1000000, не являющихся ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвертой степенью?

3. Приведите пример 10 различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них.

4. На сторонах треугольника взяты точки, делящие стороны в одном и том же отношении (в каком-либо одном направлении обхода). Докажите, что точки пересечения медиан данного треугольника и треугольника, имеющего вершинами точки деления, совпадают.

5. Найдите сумму коэффициентов при нечетных степенях x в многочлене, который получается из выражения $(x^3-x+1)^{100}$ в результате раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых.

6. Даны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что если $a_1+a_2+\ldots+a_n \leq \frac{1}{2}$, то

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)<2.$$

Олимпиада 10 класс

7. Сколько существует чисел от 1 до 1000000, не являющихся ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвертой степенью?

8. Найдите сумму коэффициентов при нечетных степенях x в многочлене, который получается из выражения $(x^3-x+1)^{100}$ в результате раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых.

9. Даны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что если $a_1+a_2+\ldots+a_n \leq \frac{1}{2}$, то

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)<2.$$

10. В пространстве построена замкнутая ломаная так, что все звенья имеют одинаковую длину и каждые три последовательных звена попарно перпендикулярны. Докажите, что число ее звеньев делится на 6.

11. Докажите, что существует степень тройки, оканчивающаяся на 001.

12. Дана окружность, точка A на ней, и точка M внутри нее. Рассматриваются хорды BC, проходящие через M. Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон треугольников ABC касаются некоторой фиксированной окружности.

Решения задач 9 класса

1. $a^2+\frac{1}{a^2}=(a+\frac{1}{a})^2-2$, а значит – тоже целое.

2. Всего чисел 1000000. Среди них 1000 полных квадратов (квадраты чисел от 1 до 1000) и 100 полных кубов (квадраты чисел от 1 до 1000), но из них 10 являются также полными квадратами (это кубы чисел, являющихся полными квадратами чисел от 1 до 10), поэтому 10 посчитаны дважды. Все четвертые степени являются полными квадратами и, следовательно, уже посчитаны. Таким образом, ответ $1000000-(1000+100-10)=998910$.

3. Например, $1, 2, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384$ (начиная с 3 каждое следующее число вдвое больше предыдущего). В самом деле, сумма всех этих чисел есть $768 = 2\cdot 384 = 4\cdot 192 = 8\cdot 96 = 16\cdot 48 = 32\cdot 24 = 64\cdot 12 = 128\cdot 6 = 256\cdot 3 = 384\cdot 2 = 768\cdot 1$.

4. Пусть A, B, C – вершины треугольника, M – точка пересечения его медиан, а A_1, B_1, C_1 – точки деления сторон BC, CA, AB соответственно. Пусть отношение $\frac{BA_1}{BC}$ равно k. Тогда

$$\overline{MA_1}=\overline{MB}+k(\overline{MC}-\overline{MB})=(1-k)\overline{MB}+k\overline{MC},$$

Аналогично,

$$\overline{MB_1}=(1-k)\overline{MC}+k\overline{MA},$$
$$\overline{MC_1}=(1-k)\overline{MA}+k\overline{MB},$$

Так как M – точка пересечения медиам треугольника ABC, имеем векторное равенство $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}=0$. Отсюда следует, что

$$\overline{MA_1}+\overline{MB_1}+\overline{MC_1}=(1-k)(\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC})+k(\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC})=0,$$

а значит, M есть точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$.

5. Пусть S – сумма коэффициентов при четных степенях x, а S' – сумма коэффициентов при нечетных степенях x. Сумма всех коэффициентов в многочлене есть его значение в точке $x=1$, поэтому равна $(1^3-1+1)^{100}=1$. Таким образом, $S+S'=1$. Разность $S-S'$ есть значение того же многочлена в точке $x=-1$. Следовательно, $S-S'=((-1)^3-(-1)+1)^{100}=(-1+1+1)^{100}=1$. Отсюда $S=1$.

6. Докажем по индукции более общее утверждение: если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – положительные числа, такие, что $a_1+a_2+\ldots+a_n\le\frac{1}{2}$, то

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)<1+2\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

База индукции: очевидно, что $1+a_1<1+2a_1$.

Шаг индукции: пусть $(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_k) < 1+2\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_k)$. Домножая обе части неравенства на положительное число $(1+a_{k+1})$, получаем

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_k)(1+a_{k+1}) <$$
$$< 1+2\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_k)+a_{k+1}+2\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_k)a_k.$$

Так как $a_1+a_2+\ldots+a_k<\frac{1}{2}$, то $2\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_k)a_{k+1}<a_{k+1}$, а значит,

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_{k+1}) < 1+2\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}),$$

что и требовалось доказать.

Решения задач 10 класса

7. См. решение задачи 2 для 9 класса.

8. См. решение задачи 5 для 9 класса.

9. См. решение задачи 6 для 9 класса.

10. Пусть $A_0A_1\ldots A_n$ – наша ломаная ($A_0=A_n$, так как ломаная замкнута). Введем в пространстве декартову систему координат, оси которой параллельны первым 3 звеньям нашей ломаной, а начало координат в вершине A_0. Тогда каждое звено параллельно какой-нибудь из координатных осей, причем координаты концов этого звена различаются на 1. Таким образом, первая координата точки A_n есть сумма ±1 по всем звеньям, параллельным оси Ox. Так как ломаная замкнута, эта сумма равна нулю, и, в частности, четна. Следовательно, количество звеньев, параллельных оси Ox четно. Аналогично, количество звеньев, параллельных каждой из осей, четно, а значит n четно. Так как каждые 3 последовательных звена попарно перпендикулярны, то звенья, параллельные каждой из осей встречаются на каждом третьем месте. Значит, n делится также на 3, а следовательно, и на 6.

11. Докажем, что существует степень тройки, дающая остаток 1 при делении на 1000 (это равносильно формулировке задачи). Так как число различных остатков от деления на 1000 конечно, то существуют две степени тройки, дающие одинаковые остатки. Пусть это числа 3^k и 3^l, где $k>l$. Тогда число $3^l(3^{k-l}-1)$ делится на 1000. Так как 3^l не делится ни на 2, ни на 5, число $3^{k-l}-1$ также делится на 1000. Это значит, что число 3^{k-l} дает остаток 1 от деления на 1000.

12. Пусть O – центр данной окружности. Радиус окружности, проходящей через середины сторон треугольников ABC, равен половине радиуса исходной окружности, так как треугольник с вершинами в серединах сторон подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Поэтому для всех треугольников ABC этот радиус постоянен. Следовательно, нам достаточно доказать, что центры всех таких окружностей принадлежат одной фиксированной окружности. Так как треугольник с вершинами в серединах сторон переводится в треугольник ABC гомотетией с центром в точке пересечения медиан и коэффициентом -2, то же самое верно и для окружностей, описанных около этих треугольников. Следовательно, центры окружностей, проходящих через середины сторон треугольников ABC получаются из точки O гомотетией с центром в точке пересечения медиан и коэффициентом -2. Поэтому достаточно доказать, что центры гомотетии (т.е. точки пересечения медиан треугольников ABC) лежат на одной окружности. Точка пересечения медиан переводится в середину стороны BC гомотетией с центром в (фиксированной) точке A и коэффициентом $\frac{3}{2}$. Поэтому достаточно доказать, что середины хорд BC лежат на одной окружности. Пусть N – середина хорды BC. Поскольку радиус, проходящий через середину хорды, перпендикулярен ей, угол ONM прямой. Следовательно, точка N лежит на (фиксированной) окружности с диаметром OM, что и требовалось.