

**На правах рукописи**

**Пеникас Генрих Иозович**

**МОДЕЛИ «КОПУЛА»  
В УПРАВЛЕНИИ РЫНОЧНЫМ РИСКОМ РОССИЙСКИХ БАНКОВ**

Специальность 08.00.13 –  
Математические и инструментальные методы экономики

**АВТОРЕФЕРАТ**

Диссертации на соискание ученой степени  
кандидата экономических наук

Москва – 2011

Работа выполнена на кафедре математической экономики и эконометрики государственного образовательного бюджетного учреждения высшего профессионального образования «Государственный университет – Высшая школа экономики»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор  
**Айвазян Сергей Артемьевич**

Официальные оппоненты: доктор экономических наук, доцент  
**Моисеев Сергей Рустамович**

кандидат экономических наук, доцент  
**Лукаш Евгений Николаевич**

Ведущая организация: **ФГОБУВПО «Финансовый университет при  
Правительстве Российской Федерации»**

Защита состоится «17» марта 2011 года в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 212.048.02 в Государственном университете – Высшей школе экономики по адресу: 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д.20, ауд. 309.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Государственного университета – Высшей школы экономики.

Автореферат разослан «\_\_\_» февраля 2011 года

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
д.э.н.

Д.В. Нестерова

## **1. Общая характеристика диссертации**

### **Актуальность темы исследования**

В 2006 г. Базельский Комитет по банковскому надзору опубликовал документ Базель II, описывающий порядок оценки рисков для цели расчета достаточности капитала банков. Основным нововведением стала возможность использования вероятностных (внутрибанковских, IRB) моделей для оценки отдельных рисков банка.

По результатам событий кризисного периода 2008 – 2009 гг. Базельский Комитет опубликовал рекомендации по способам, которые более предпочтительны для целей расчета совокупного риска банка в рамках Базель II. Эксперты Базельского Комитета проранжировали все способы по возрастанию сложности, гибкости и одновременно предпочтительности при использовании риск-менеджерами. В сформированный список включены модели «копула», из чего следует, что им отдано предпочтение по сравнению с наиболее распространенными в банковской практике подходами (суммирование, простая диверсификация и дисперсионно-ковариационный подход). Это объясняется тем, что модели «копула» позволяют моделировать совместные многомерные распределения (включая асимметричные), которые не являются гауссовскими.

К настоящему времени (октябрь 2010 г.) в документе Базельского Комитета «Развитие подходов к моделированию агрегирования рисков» обобщены основные наблюдения по вопросам агрегирования рисков, позволившие выделить преимущества, получаемые от применения моделей «копула». Необходимо отметить, что в настоящее время Центральный Банк Российской Федерации ведет активную<sup>1</sup> работу по внедрению соглашения Базель II в банковской системе России.

---

<sup>1</sup> 21 июля 2010 г. Банк России опубликовал аналитический документ о степени соответствия внутрибанковских подходов к управлению кредитным риском банков – участников проекта «Банковское регулирование и надзор (Базель II)» Программы сотрудничества Евросистемы с Банком России минимальным требованиям IRB-подхода Базеля II (см. <http://cbr.ru/today/PK/GAP.pdf>).

Учитывая преимущества, которые представляют модели «копула» при моделировании совместных многомерных распределений, для возможности их корректного использования в практике управления риском (включая рыночный) российских банков необходимо проработать вопросы, которые мало или недостаточно рассмотрены в части приложения моделей «копула» к управлению рыночным риском российских банков, включая вопросы поиска момента структурного сдвига в копуле, порядок выбора наилучшей модели «копула», а также определение семейств копул, позволяющих наилучшим образом смоделировать динамику экономических показателей, влияющих на уровень рыночного риска российских банков.

### **Степень научной разработанности проблемы**

После того, как в конце 1990-х годов в монографиях Джое Х. и Нельсена Р. появились первые систематизированные обобщения теоретических оснований моделей «копула», модели «копула» стали активно применяться в решении задач управления рисками, поскольку позволяли моделировать асимметричные совместные распределения случайных величин, а также разделять этапы оценки предельных (маржинальных) распределений и характера связки (параметра копулы). Хотя вопросы управления рисками получили широкое освещение в российском научном сообществе (работы Алескерова Ф.Т., Смирнова С.Н., Шоломицкого А.Г.), вопросам приложения моделей «копул» в задачах управления рисками российских банков уделено явно недостаточное внимание. В этой связи можно отметить работы Алексеева В.В., Соложенцева Е.Д., Шоколова В.В., Фантаццини Д.

Несмотря на активное использование моделей «копула» в исследованиях отечественных и зарубежных авторов (работы Вальдеза Е., Джиниуса М., Дэ Мишеле К., Женеста К., Муралидхара К., Парсы Р., Ремийярда Б., Сарати Р., Скайллет О., Смита М., Старцеры Е., Фавре А.-К., Фриза Э., Черубини У.),

---

31 января 2011 г. Банк России опубликовал Консультативный документ о перспективах применения российскими банками IRB-подхода Компонента I Базеля II в надзорных целях и необходимых для этого мероприятиях (действиях) (см. [http://cbr.ru/today/PK/Basel\\_january-2011.pdf](http://cbr.ru/today/PK/Basel_january-2011.pdf)).

можно выделить три категории вопросов, которые не были рассмотрены в достаточной степени.

Во-первых, ряд исследований, основанных на моделях «копула», предполагает неизменность копулы в течение времени (работы Анэ Т., Алексеева В.В., Лая Й., Натале Ф., Соложенцева Е.Д., Фантаццини Д., Хсу Ч.-Ч., Черубини У., Шоколова В.В.). Тем не менее, возможность изменения копулы, или наличия **структурного сдвига в копуле**, нельзя отрицать на теоретическом уровне. Это явление подтвердили<sup>2</sup> и факты совместной динамики экономических показателей во время мирового финансового кризиса 2008-2009 гг., что требует разработки инструментария поиска момента структурного сдвига в копуле.

Во-вторых, в ходе проведения исследования с применением моделей «копула» перед каждым ученым возникал вопрос **выбора наилучшей модели «копула»**, т.е. наилучшим образом соответствующей исходному совместному распределению случайных величин. Многие исследователи решали этот вопрос путем использования единого критерия, характеризующего качество модели на множестве обучающей выборки данных (работы Берга Д., Женеста К., Ремийярда Б., Саву К., Треде М., Черубини У.). Тем не менее, задачи управления рисками направлены на получение таких оптимальных параметров управления, которые не приведут к превышению уровня риска в будущем. Это требует высокой прогнозной, но не объясняющей силы модели «копула». При этом различие постановок задач управления рисками (например, оптимизация и хеджирование рисков) требуют использования дифференцированных критериев выбора модели «копула» для решения конкретной задачи, что в вышеприведенных работах учтено не было.

В-третьих, решение задачи управления рыночным риском российских банков требует использования моделей «копула», наилучшим образом характеризующих совместную динамику российских риск-факторов (обменных курсов, процентных ставок, котировок ценных бумаг и фьючерсов для

---

<sup>2</sup> Данные подтверждения приводятся далее в результатах исследования.

российской экономики). Однако, существующие исследования имели своим объектом либо риск-факторы экономик иностранных стран (работы Паттона А., Юнкера М., Хсу Ч.-Ч., Лая Й.), либо только риск-факторы ценового риска (работы Алексева В.В., Соложенцева Е.Д., Фантаццини Д., Шоколова В.В.). Таким образом, можно сделать вывод, что в более ранних работах не было рассмотрено **восстановление с помощью моделей «копула» совместных распределений риск-факторов российской экономики** (обменные курсы, процентные ставки, котировки ценных бумаг и фьючерсов) в рамках решения задач управления рыночным риском российских банков.

Поэтому данное диссертационное исследование направлено на восполнение пробела в трех вышеобозначенных вопросах приложения моделей «копула» к решению задач управления рыночным риском российских банков: разработка инструментария оценки момента структурного сдвига в копуле и методологии выбора наилучшей модели «копула» (две задачи решены во *второй главе*); а также выбор семейств моделей «копула» для восстановления совместного распределения факторов рыночного риска российской экономики (данная задача решена в *третье главе*).

### **Объект и предмет исследования**

**Объектом исследования** выбраны рыночные риски российских банков, т.е. вероятные убытки (прибыли) от изменения таких рыночных факторов риска («риск-факторов»), как обменные курсы валют (валютный риск), процентные ставки (процентный риск), котировки ценных бумаг (ценовой, или фондовый, риск).

**Предметом исследования** выступают способы моделирования многомерных распределений доходностей (приростов значений за период) для факторов риска в трех задачах управления ими (оптимизация валютного и процентного рисков; хеджирование ценового риска).

### **Цель и задачи исследования**

**Цель исследования** состоит в разработке инструмента управления рыночными рисками российского банка на основе использования моделей

«копула», позволяющего по сравнению с традиционно используемыми подходами дать более точную оценку рисков при восстановлении совместных распределений доходностей риск-факторов.

**Задачи исследования** включают в себя:

- (1) Анализ литературы для систематизации существующих подходов к приложению моделей «копула» в задачах управления рыночным риском.
- (2) Разработка алгоритма поиска момента структурного сдвига в копуле, разделяющего выборку на две части, однородные в терминах копулы совместного распределения.
- (3) Разработка методологии, позволяющей на основе ограниченного набора критериев выбрать наилучшую модель «копула» для каждой из трех вышеперечисленных задач управления рыночным риском российского банка.
- (4) Моделирование совместного распределения доходностей риск-факторов российской экономики для корректного решения выбранных задач управления рыночным риском российских банков.

### **Методологическая и теоретическая основы исследования**

**Методологическая основа** исследования включает следующие методы:

- Методы многомерного статистического анализа построения и оценки моделей «копула» (монографии Джое Х., Нельсена Р., Черубини У.);
- Метод имитационного моделирования Монте-Карло при восстановлении многомерных распределений на основе моделей «копула» (работы Алексеева В.В., Женеста К., Паттона А., Соложенцева Е.Д., Фантаццини Д., Шоколова В.В.);
- Методы параметрической и непараметрической оценки моделей «копула» (работы Кима Дж., Ремийярда Б., Силвапюлле М., Силвапюлле П., Скайллет О.);
- Методы тестирования статистической значимости моделей «копула» (работы Берга Д., Женеста К., Саву К., Треде М., Тсукахара Х.);

**Теоретическая основа** исследования включает следующие модели и теоретические наработки, полученные в работах как отечественных, так и зарубежных авторов:

- Модель оценки рыночного риска (работы Алескерова Ф.Т., Анэ Т., Вальдеза Е., Каруби К., Смирнова С.Н., Шоломицкого А.Г.);
- Модели портфельной оптимизации (работы Линтнера Дж., Марковитца Х., Мертона Р., Мосина Дж., Самюэльсона П.);
- Модели управления рыночными рисками на основе моделей «копула» (работы Алексева В.В., Лая Й., Натале Ф., Соложенцева Е.Д., Шоколова В.В., Хсу Ч.-Ч.);
- Модели «копула» в приложении к российским данным (работы Алексева В.В., Соложенцева Е.Д., Фантаццини Д., Шоколова В.В.);

### **Информационная база исследования**

В основе исследования лежат данные, собранные за период, максимально доступный, однородный (т.е. после кризиса 1998 года) и достаточный для проведения оценки модели «копула» в рамках решения задач управления рыночным риском российских банков.

Источником данных о динамике факторов валютного риска (об обменных курсах валют) стали информационные ресурсы Банка России; процентного риска (о процентных ставках) – ресурсы Банка России и системы Bloomberg; ценового риска (котировки ценных бумаг и фьючерсов) – ресурсы Российской Торговой Системы (биржа РТС).

### **Научная новизна**

**Научная новизна** исследования состоит в разработке инструмента управления рыночными рисками российского банка на основе использования моделей «копула», позволяющего по сравнению с традиционно используемыми подходами дать более точную оценку рисков при восстановлении совместных распределений доходностей риск-факторов, что основано на следующих существенных результатах, полученных автором и выносимых на защиту:



- 1. Проведена систематизация существующих подходов по отношению моделей «копула» в задачах управления рыночным риском российских банков.** В результате анализа определены преимущества и недостатки существующих подходов.
- 2. Разработан алгоритм поиска момента структурного сдвига в копуле совместного распределения.** Разработанный алгоритм был успешно апробирован при исследовании совместных распределений факторов рыночного риска российской экономики. Обнаруженные даты структурных сдвигов в копуле многомерного распределения риск-факторов полностью согласуются с датами принятия ключевых решений об изменении ставок рефинансирования Центральными Банками соответствующих валютных зон.
- 3. Предложена новая постановка задачи хеджирования, основанная на минимизации уровня ценового риска хеджируемого портфеля, оцененного с помощью модели «копула».** Предложенная модель показала свою эффективность в терминах увеличения доходности и снижения стандартного отклонения стоимости захеджированного портфеля в задачах прямого хеджирования ценового риска в сравнении с традиционным способом хеджирования.
- 4. Определен перечень критериев, которые необходимо использовать для выбора наилучшей модели «копула».** Данные критерии учитывают точность оценки величины рыночного риска и результат решения трех задач управления рыночным риском российского банка (оптимизация валютного и процентного риска; хеджирование ценового риска).
- 5. Разработана методология выбора модели «копула», наилучшей в терминах достижения оптимальных значений решаемых задач управления рыночным риском российских банков.** Заданный набор критериев формирует иерархическую систему, позволяющую путем последовательного сопоставления значений критериев, оцененных на периоде ретроспективного прогноза, выбрать наилучшую модель «копула».

**6. Определены семейства моделей «копула», которые необходимо использовать для восстановления совместных распределений риск-факторов рыночного риска российских банков. Для управления процентным риском российских банков необходимо использовать копулу Гумбеля; для управления валютным риском российских банков - копулу Гумбеля; для прямого хеджирования ценового риска российского банка - экстремальные копулы Коши, Галамбоса и Хайслера-Райса; для перекрестного хеджирования ценового риска российского банка - копулу Плаке.**

### **Теоретическая и практическая значимость диссертационного исследования**

**Теоретическая значимость** исследования включает следующее:

- Разработан инструментальный метод оценки момента структурного сдвига в эмпирической копуле совместного распределения;
- Предложена новая постановка задачи хеджирования, основанная на принципе минимизации ценового риска;
- Разработана методология выбора копулы из однопараметрического семейства, наилучшей с точки зрения прогноза величины рыночного риска российского банка;

**Практическая значимость** исследования состоит в следующем:

- Выявлены даты структурных сдвигов в копуле совместного распределения доходностей риск-факторов рыночного риска для рассмотренной выборки наблюдений;
- Определены семейства копул, позволяющие смоделировать совместную динамику риск-факторов российской экономики;
- Разработан программный код для программной среды R, реализующий алгоритм поиска структурного сдвига в копуле совместного распределения;
- Разработаны программные коды для программной среды R, решающие задачи управления рыночным риском российского банка (оптимизация

валютного и процентного рисков; хеджирование ценового риска) с использованием моделей «копула»;

Теоретические результаты исследования включены в учебный курс «Многомерный статистический анализ» для студентов магистратуры факультета экономики Государственного университета – Высшая школа экономики.

Практические результаты исследования были апробированы в ОАО Альфа-Банк и легли в основу внутренних документов, регламентирующих порядок управления рыночными рисками ОАО Альфа-Банк, что соответствует как требованиям Банка России, так и рекомендациям Базельского Комитета по банковскому надзору.

### **Структура диссертации**

Диссертационное исследование включает в себя введение, три главы, заключение, библиографию, четыре приложения общим объемом 166 стр.

### **Апробация результатов исследования**

Результаты диссертационного исследования были представлены на следующих конференциях и научных семинарах.

1. Семинар «Банки и предприятия: модели и рейтинги» (23 ноября 2010 г.; РЭШ; Москва).
2. Научный семинар кафедры «Математика» под руководством профессора С.Е. Степанова (10 ноября 2010 г.; Финансовый Университет при Правительстве Российской Федерации; Москва).
3. Большой научно-исследовательский семинар кафедры теории вероятностей механико-математического факультета (29 сентября 2010 г.; Московский Государственный Университет им. Ломоносова; Москва).
4. IX Международная конференция «Применение многомерного статистического анализа в экономике и оценке качества» (25 августа 2010 г.; ЦЭМИ, ГУ-ВШЭ; Москва).

5. Конференция "Прогнозирование финансовых рынков" (28 мая 2010 г.; Кафедра международных валютно-финансовых отношений ГУ-ВШЭ; Москва).
6. Конференция «3rd Financial Risks International Forum», совместный доклад с Б.Бродским, И.Сафарян (26 марта 2010 г.; Insitute Louis Bachelier, Europlace Institute of Finance; Париж, Франция).
7. Научный семинар "Многомерный статистический анализ и вероятностное моделирование реальных процессов" (17 февраля 2010 г.; ЦЭМИ; Москва).
8. Первый российский экономический конгресс (12 декабря 2009 г.; Новая Экономическая Ассоциация; Москва).
9. Научный семинар лаборатории по финансовой инженерии и риск-менеджменту под руководством С.Н. Смирнова (17 ноября 2009 г.; ГУ-ВШЭ; Москва).
10. Конференция «International Risk Management Conference», совместный доклад с Ю. Титовой, В. Симаковой (22 – 24 июня 2009 г.; Finanza Firenze Research Centre; Венеция, Италия).
11. Международная юбилейная сессия научного семинара "Многомерный статистический анализ и вероятностное моделирование реальных процессов" (24 июня 2009 г.; ЦЭМИ; Звенигород).
12. VII-ая Международная школа-семинар "Многомерный статистический анализ и эконометрика" (24 сентября 2008 г.; ЦЭМИ, МШЭ МГУ, Российско-Армянский (Славянский) государственный университет, Армянский государственный экономический университет; Цахкадзор, Республика Армения).

## **2. Основные положения диссертации**

В первой главе «Генезис задач управления рыночным риском банка» систематизированы существующие подходы к решению задач управления рыночным риском в результате анализа работ отечественных и зарубежных

авторов по вопросам развития теории копул (монографии Джое Х., Нельсена Р.), постановке задач портфельной оптимизации (работы Марковитца Х., Мертона Р., Линтнера Дж., Самюэльсона П.), приложению моделей «копула» к моделированию факторов рыночного риска (работы Юнкера М., Натале Ф., Паттона А., Хсу Ч.-Ч., Лая Й.), по применению копул для исследования российских данных (работы Алексева В.В., Соложенцева Е.Д., Шokolова В.В., Фантаццини Д.).

В результате был сделан вывод, что поскольку первые предложения по решению оптимизационных задач, сделанные Марковитцем Х., развитые Мертоном Р., Линтнером Дж., Самюэльсоном П., предполагали многомерную нормальность совместного распределения, то именно данная предпосылка легла в основу законодательных документов Базельского Комитета, Банка России и Международного Комитета по стандартам отчетности по регулированию процентного риска, валютного риска и порядка хеджирования ценового риска, соответственно. Тем не менее, предпосылка многомерной нормальности распределения риск-факторов не соответствует их совместному распределению, наблюдаемому на практике.

Поэтому дальнейшая работа с источниками позволила систематизировать способы учета того факта, что предельные и многомерные распределения риск-факторов валютного, процентного и ценового риска не характеризуются гауссовским распределением. Для учета такого факта исследователи стали предпринимать попытки восстановления совместных распределений риск-факторов с помощью моделей «копула». Так Паттон А. использовал их для моделирования совместной динамики обменных курсов; Юнкер М. – процентных ставок; Натале Ф., Алексева В.В., Соложенцев Е.Д., Шokolов В.В., Фантаццини Д. – котировок ценных бумаг; Хсу Ч.-Ч. и Лай Й. – цен фьючерсных контрактов.

Таким образом, анализ наиболее современных работ позволил сделать вывод о том, что все еще остаются неисследованными три вопроса приложения моделей «копула» к решению задач управления рыночным риском российских

банков, которые разработаны во второй и третьей главах данного диссертационного исследования. Во-первых, все работы предполагают гипотезу о неизменности копулы на всем массиве данных, которая, как показано в данной работе, нарушается в реальности. Это требует учета *структурного сдвига в копуле* при моделировании. Во-вторых, во всех работах выбор копулы основывается на однокритериальных тестах, измеренных на обучающей выборке, т.е. не позволяющих оценить прогнозную силу моделей и дифференцировать их в зависимости от решаемых задач управления рыночным риском. Это требует разработки порядка *выбора наилучшей модели «копула»*. В-третьих, ни одна из работ не нацелена на моделирование совместной динамики факторов процентного и валютного рисков российской экономики, а также моделирование ценового риска в задачах хеджирования.

**Вторая глава** «Теоретико-методологические основы исследования» посвящена разработке алгоритма поиска структурного сдвига в копуле и порядку выбора наилучшей модели «копула», потребность в которых была выявлена в первой главе.

Для поиска **структурного сдвига в копуле** используется алгоритм, предполагающий наличие выборки  $\{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N\}$  независимых  $R^d$ -мерных векторов и некоторого неизвестного момента<sup>3</sup>  $m = [\theta N]$ , когда характер зависимости компонентов  $X_{l1}, \dots, X_{ld}$  каждого вектора  $\mathbf{X}_l$  изменяется, т.е. совместная функция распределения определяется следующим образом:

$$H(x_{l1}, \dots, x_{ld}) = \begin{cases} C_1(F_1(x_{l1}), \dots, F_d(x_{ld})), & 1 \leq l \leq m \\ C_2(F_1(x_{l1}), \dots, F_d(x_{ld})), & m < l \leq N \end{cases}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{X}_l = (x_{l1}, \dots, x_{ld})$  - значения случайного  $d$ -мерного вектора  $\mathbf{X}_l$  в момент  $l = 1, \dots, N$ .

где  $C_i$  ( $i = 1, 2$ ) - функция  $d$ -переменных (копула) и с учетом выводов теорем Шкляра от 1959 и 1996 гг. определяется следующим образом:

<sup>3</sup> Символ  $[ ]$  обозначает целую часть.

$$C(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) = F_{\mathbf{X}} \left( F_{X^{(1)}}^{-1} \left( u^{(1)} \right), F_{X^{(2)}}^{-1} \left( u^{(2)} \right), \dots, F_{X^{(d)}}^{-1} \left( u^{(d)} \right) \right), \quad (2)$$

где  $\mathbf{u} = (u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(d)})$ , где  $u^{(i)} = F_{X^{(i)}}^{-1} \left( y^{(i)} \right)$  - значение частной функции распределения  $i$ -ой случайной компоненты ( $i = 1, \dots, d$ ) многомерного случайного вектора  $\mathbf{X} = (X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(d)})^T$ , функцией совместного распределения которого является  $F_{\mathbf{X}}$ ;  $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  - вектор параметров функции копулы.

Фактически структурный сдвиг является дискретным, не непрерывным. Переход от одной копулы к другой осуществляется в разные временные периоды, которые зависят от частотности данных (например, на следующий день при использовании дневных наблюдений).

Тогда необходимо проверить гипотезу такого вида:

$$H_0 : C_1 = C_2 \quad (3)$$

$$H_1 : C_1 \neq C_2, \quad (4)$$

где  $C_1, C_2$  - некоторые копулы (необязательно одного семейства).

При отклонении нулевой гипотезы необходимо построить оценку момента структурного сдвига  $\mathcal{M}$ , для которого вероятности ошибок первого и второго рода были бы достаточно малы (стремились к нулю с увеличением объема выборки  $N$ ), а оценка параметра структурного сдвига (разладки)  $\hat{\theta}_N$ , была бы состоятельной, т.е. стремилась бы к истинному параметру разладки  $\theta$  при увеличении объема выборки  $N$ .

Предлагаемый метод обнаружения основан на непараметрическом подходе сравнения эмпирических копул  $D_l(u)$ , которые для каждого временного периода  $l = 1, \dots, N - 1$  определяются как:

$$D_l(u) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l I(U_{i,l} \leq u) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \prod_{j=1}^d I(U_{ij,l} \leq u_j) \quad (5)$$

$$D_{N-l}(u) = \frac{1}{N-l} \sum_{i=l+1}^N I(U_{i,N-l} \leq u) = \frac{1}{N-l} \sum_{i=l+1}^N \prod_{j=1}^d I(U_{ij,N-l} \leq u_j), \quad (6)$$

где  $u_j$  - порог сетки разбиения  $d$ -мерного единичного куба;  $I()$  - функция-индикатор, принимающая значение единицы при выполнении условия в скобках;  $U_{i,l} = (U_{i1,l}, \dots, U_{id,l})$  - вектор значений частных эмпирических функций распределения, где для каждого  $j = [1, \dots, d]$  верно следующее:

$$U_{ij,l} = \frac{l}{l+1} F_{j,l}(X_{ij}) = \text{rank}(X_{ij}) / (l+1), \quad 1 \leq i \leq l \quad (7)$$

$$U_{ij,N-l} = \text{rank}(X_{ij}) / (N-l+1), \quad l+1 \leq i \leq N \quad (8)$$

Для обнаружения момента разладки  $m$  используется следующая модификация статистики Колмогорова-Смирнова<sup>4</sup> (модификация учитывает соотношение размера выборки до и после момента  $l$  разбиения всей выборки):

$$\Psi_{l,N-l}(u) = (D_l(u) - D_{N-l}(u)) \sqrt{l(N-l)} / N \quad (9)$$

$$T_N = \max_{[\beta N] \leq l \leq [(1-\beta)N]} \sup_u |\Psi_{l,N-l}(u)|, \quad (10)$$

где задана константа  $0 < \beta < 1/2$ , чтобы выполнялось неравенство  $[\beta N] \leq l \leq [(1-\beta)N]$ .

Оценка момента структурного сдвига строится следующим образом:

$$\hat{m}_N \in \text{Arg} \max_{[\beta N] \leq l \leq [(1-\beta)N]} \sup_u |\Psi_{l,N-l}(u)|, \quad (11)$$

а оценка параметра структурного сдвига определяется как  $\hat{\theta}_N = \hat{m}_N / N$ .

В исследовании предлагаются и обосновываются следующие показатели эффективности метода обнаружения:

1) вероятность ошибки первого рода:

<sup>4</sup> Использование статистики Колмогорова-Смирнова лишь обсуждалось в предыдущих исследованиях (см. например работы Тсухакары Х.), но рассмотрен был только случай применения статистики Крамера-фон-Мизеса (см. статью 2009 г. Ремийярда Б. и Скайллет О.). Поскольку статистика Колмогорова-Смирнова не применялась ранее, она была использована в данном диссертационном исследовании.



$$\alpha_N = P_0 \{T_N > G\}, \quad (12)$$

где  $G > 0$  - выбираемая исследователем граница принятия решения о наличии структурного сдвига;

2) вероятность ошибки второго рода:

$$\delta_N = P_m \{T_N \leq G\}. \quad (13)$$

3) вероятность ошибки оценивания момента структурного сдвига:

для любого малого  $\varepsilon$  (например, для  $0 < \varepsilon < 1/2$ ):

$$\gamma_N = P_m \{|\hat{\theta}_N - \theta| > \varepsilon\}. \quad (14)$$

В итоге, получена оценка сверху математического ожидания статистики  $T_N$ , определяющей момент структурного сдвига в копуле. В полном тексте диссертационного исследования приводятся результаты экспериментального тестирования алгоритма обнаружения структурного сдвига на примере данных, смоделированных копулами Клейтона и Гумбеля.

Далее приводятся постановки рассматриваемых задач управления рыночным (процентным и валютным) риском российских банков, которые ставят целью максимизировать целевую функцию (суммарную доходность  $\bar{R}$  от изменения риск-факторов) при условии, чтобы величина риска  $\Gamma\Pi(\alpha)$ , измеренная методом границы потерь<sup>5</sup>, не превысила величины капитала банка  $K$  за счет управления позициями  $X$ , подверженными риску (открытые валютные позиции (ОВП) – для валютного риска; разрывы (гэпы) ликвидности – для процентного риска). Математически задача имеет следующий вид:

$$\begin{cases} E(\bar{R} | X) \rightarrow \max_x \\ \Gamma\Pi(\alpha) \leq K \\ \sum_j x^{(j)} \cdot P_j = 0 \end{cases}, \quad (15)$$

<sup>5</sup> Граница потерь уровня  $\alpha$  ( $\Gamma\Pi(\alpha)$ , VaR) представляет собой квантиль распределения убытков от рыночного риска уровня значимости  $\alpha$ , т.е. граница потерь уровня  $\alpha$  отражает, какая максимальная величина денежных средств может быть потеряна банком вследствие движения рыночных факторов риска с вероятностью не выше  $(1-\alpha)$  при неизменной ситуации с доступной ликвидностью.

где  $X = (x^{(1)}, \dots, x^{(m)})^T$  и  $x^{(j)}$  – размер управляемой позиции, подверженной  $j$ -ому риск-фактору ( $j = 1, \dots, m$ );  $K$  – капитал банка;  $P_j$  – значение  $j$ -ого риск-фактора;  $\Gamma(\alpha) = -F_{\bar{R}}^{-1}(\alpha)$  – величина рыночного риска банка (граница потерь уровня  $\alpha$ ), определяемая как квантиль функции распределения целевой доходности  $\bar{R}$ , где  $\bar{R} = \sum_j R^{(j)}$  и  $R^{(j)} = \eta_j \cdot x^{(j)}$ , где  $\eta_j(t) = \ln(P_j(t)/P_j(t-1))$  – логарифмическая доходность («доходность»)  $j$ -ого риск-фактора за период  $[t-1; t]$ .

Задача управления ценовым риском в операциях хеджирования представляет собой частный случай задачи управления рыночным риском с тем отличием, что управление производится не всеми позициями, а только позицией в срочных (хеджирующих) активах. Иными словами, задача хеджирования ценового риска состоит в его минимизации, т.е. в минимизации изменения целевой функции (стоимости портфеля, состоящего из базового и хеджирующего активов). Традиционный способ хеджирования реализуется по следующему правилу из формулы (16) (также именуемым МНК-подходом, поскольку полученный коэффициент (оптимальное хеджирующее соотношение) равен коэффициенту парной регрессии доходности срочного актива на доходность базового):

$$h^* = \frac{\sigma_{CASH, FWD}}{\sigma_{FWD}^2}, \quad (16)$$

где  $h^*$  – оптимальное хеджирующее соотношение,  $\sigma_{CASH, FWD}$  – ковариация между доходностями базового и срочного активов;  $\sigma_{FWD}^2$  – дисперсия доходности срочного актива;

Учитывая, что минимизировать ценовой риск возможно не только по средствам минимизации колебаний стоимости захеджированного портфеля как в формуле (16), так и через наложение непосредственных ограничений снизу на величину ценового риска, то автором предложена альтернативная постановка

задачи хеджирования ценового риска, которая предполагает использование формулы (17):

$$E(\text{ГП}(\alpha) | X) \rightarrow \min_X \quad (17),$$

где  $X$  - позиция в срочном (хеджирующем) активе.

Определив порядок оценки момента структурного сдвига в копуле и описав постановки задач управления рыночным риском российских банков, при решении которых он будет использован, возникает потребность в определении порядка выбора наилучшей<sup>6</sup> модели «копула».

Обосновано, что выбор копулы производится по следующему набору индикаторов, рассчитанных на множестве экзаменуемой (не обучающей) выборки: количество пробоев<sup>7</sup> границы потерь рыночного риска; величина максимального пробоя границы потерь рыночного риска; среднеквадратическая ошибка ретроспективного прогноза величины рыночного риска; кумулятивная доходность рыночного риска; стандартного отклонение реализованного рыночного риска.

Перечисленные критерии формируют иерархическую систему, позволяющую путем их последовательного сопоставления для нескольких моделей «копула» выбрать наилучшую. Подробный порядок проведения такого сопоставления приводится в полном тексте диссертационного исследования.

После формулирования алгоритма оценки момента структурного сдвига в копуле и порядка выбора наилучшей «копулы» в **третьей главе** «Эмпирическая реализация. Сравнение с традиционными подходами» проводится их апробация на российских данных. Вначале описывается выбор копулы для моделирования совместной динамики обменных курсов валют для решения задачи управления валютным риском, затем процентных ставок – для

---

<sup>6</sup> Под наилучшей понимается модель «копула», более точно прогнозирующая величину риска в трех описанных выше задачах управления рыночным риском российских банков.

<sup>7</sup> Пробой – случай превышения фактической реализации риска над его оценкой, полученной по средствам метода оценки границы потерь риска  $\text{ГП}(\alpha)$ .

задачи управления процентным риском и котировок ценных бумаг и фьючерсов – для управления ценовым риском в операциях хеджирования.

При решении каждой из трех обозначенных задач управления рыночным риском результаты решения в предположении многомерной нормальности (подход 1) сравниваются с решением с использованием копулы (подход 2).

Перед решением задачи управления валютным риском был проведен анализ данных на предмет наличия структурного сдвига в копуле совместного распределения доходностей обменных курсов валют. Датой сдвига было определено 14 декабря 2006 г. Далее был исследован характер совместного распределения обменных курсов, которое не является распределением независимых случайных величин и не является гауссовским. Учитывая тенденции в совместной динамике обменных курсов, оно наилучшим образом описывается архимедовой копулой Гумбеля. Данная копула позволяет смоделировать факт того, что обратные обменные курсы иностранных валют по отношению к рублю РФ имеют тенденцию одновременно расти, нежели одновременно снижаться. При этом подход 2 на основе копул привел к получению систематически более высокого уровня доходности, чем подход 1, основанный на многомерной нормальности на рассмотренных данных.

Следующей решенной задачей была задача управления процентным риском. Перед ее решением массив данных был рассмотрен на предмет наличия структурного сдвига в копуле совместных распределений процентных ставок в рублях, долларах и евро. Структурные сдвиги в копулах были выявлены 3 декабря 2008 г., 17 июля 2008 г., 24 сентября 2008 г., соответственно. Эти даты полностью согласуются с динамикой ставок рефинансирования Центральные Банков соответствующих валютных зон как ключевых факторов, определяющих общий уровень процентных ставок в экономике.

Для цели моделирования совместной динамики риск-факторов процентного риска необходимо использовать копулу Гумбеля, так как совместное распределение доходностей процентных ставок носит асимметричный характер, причем подтверждено, что ставки более склонны

одновременно расти, нежели снижаться. Использование копулы при решении задачи оптимизации процентного риска на ретроспективном горизонте прогнозирования привело к тому, что суммарная доходность при подходе 2, основанному на копуле, оказалась в четыре раза выше, чем при подходе 1, предполагавшим многомерную нормальность распределения.

Далее было рассмотрено управление ценовым риском в операциях хеджирования. Перед ее решением также был проведен анализ данных на предмет наличия структурного сдвига в копуле, который был выявлен 28 апреля 2009 г. Следующим этапом было моделирование двумерных распределений доходностей котировок ценных бумаг и фьючерсов на них. Сильная взаимосвязь между крайними (редкими) реализациями доходностей для задач прямого хеджирования потребовала применения экстремальных копул (Коши, Галамбоса, Хайслера-Райса), тогда как менее значимая взаимосвязь в задаче перекрестного хеджирования была наилучшим образом смоделирована копулой Плаке. Применение копул (подход 2) к решению задачи прямого хеджирования по сравнению с подходом, предполагающим многомерную нормальность распределения (подход 1), привело к снижению волатильности стоимости захеджированного портфеля и к одновременному повышению суммарной доходности.

### **3. Основные результаты и выводы работы**

- 1. На основе анализа существующих подходов по приложению моделей «копула» к управлению рыночным риском российских банков выявлены преимущества и недостатки существующих подходов.**
- 2. Разработан алгоритм поиска момента структурного сдвига в копуле совместного распределения.** В основе алгоритма лежит принцип поиска максимальной дистанции Колмогорова-Смирнова между эмпирическими копулами до и после момента структурного сдвига. Разработанный алгоритм был успешно апробирован при исследовании совместных распределений факторов рыночного риска российской экономики. Обнаруженные даты структурных сдвигов в копуле многомерного распределения риск-факторов

полностью согласуются с датами принятия Центральными Банками соответствующих валютных зон ключевых решений об изменении ставок рефинансирования.

- 3. Предложена новая постановка задачи хеджирования, основанная на минимизации уровня ценового риска хеджируемого портфеля, оцененного с помощью модели «копула».** Предложенная модель показала свою эффективность в терминах увеличения доходности и снижения стандартного отклонения стоимости захеджированного портфеля в задачах прямого хеджирования ценового риска в сравнении с традиционным способом хеджирования.
- 4. Определен перечень критериев, которые необходимо использовать для выбора наилучшей модели «копула».** В число критериев входят следующие: количество пробоев границы потерь рыночного риска; величина максимального пробоя границы потерь рыночного риска; среднеквадратическая ошибка ретроспективного прогноза величины рыночного риска; кумулятивная доходность рыночного риска; стандартное отклонение реализованного рыночного риска.
- 5. Разработана методология выбора наилучшей модели «копула» на основе ограниченного набора критериев, которая была успешно апробирована при решении задач управления рыночным риском российских банков (включая оптимизацию валютного и процентного рисков и хеджирование ценового риска).** Критерии, перечисленные в п. 4, измеряются на наборе экзаменующей выборки данных, формируя иерархическую систему, что позволяет выбрать наилучшую модель «копула» методом последовательного сопоставления расчетных значений критериев.
- 6. Определены семейства копул, которые необходимо использовать при решении конкретных задач управления рыночным риском российского банка, позволяющих наилучшим образом смоделировать динамику соответствующих риск-факторов.** При решении задачи оптимизации

*валютного риска* российского банка необходимо использовать *копулу Гумбеля* для совместного распределения доходностей обменных курсов иностранных валют к рублю РФ. При решении задачи управления *процентным риском* российского банка необходимо также использовать *копулу Гумбеля* для совместного распределения процентных ставок в рублях РФ. Для решения задачи *прямого хеджирования ценового риска* российского банка необходимо использовать *экстремальные копулы (Коши, Галамбоса, Хайслера-Райса)*, а при решении задачи *перекрестного хеджирования ценового риска* российского банка – *копулу Плаке*.

### **Список публикаций по теме диссертации**

**Работы, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК Министерства образования и науки Российской Федерации:**

1. Пеникас Г.И. Моделирование динамики рисков по Базелю II // Банковское Дело. 2010. № 11. С. 66 – 71 (0.24 п.л.) (в соавторстве с Андриевской И.К., Пильником Н.П., вклад автора – 0.08 п.л.).
2. Пеникас Г.И. Модели «копула» в приложении к задачам финансов // Журнал Новой Экономической Ассоциации. 2010. № 7. С. 24 – 44 (1.2 п.л.).
3. Пеникас Г.И. Модели «копула» в управлении валютным риском банка // Прикладная эконометрика. 2010. № 1 (17). С. 62—87 (1.4 п.л.).
4. Пеникас Г.И. Обнаружение структурных сдвигов в моделях копул // Прикладная эконометрика. 2009. № 4 (16). С. 3—15 (0.66 п.л.) (в соавторстве с Бродским Б.Е., Сафарян И.А., вклад автора – 0.22 п.л.).
5. Пеникас Г.И. Управление процентным риском на основе копулы-GARCH моделей // Прикладная эконометрика. 2009. № 1 (13). С. 3—36 (1.5 п.л.) (в соавторстве с Симаковой В.Б., вклад автора – 0.75 п.л.).

6. Пеникас Г.И. Прогнозирование кривой доходности в задачах управления активами и пассивами банка // Прикладная эконометрика. 2008. № 4 (12). С. 3 – 26 (1 п.л.).
7. Пеникас Г.И. Риск рыночной ликвидности: вопросы практической оценки // Банковское дело. 2007. № 11. С. 74 – 80 (0.3 п.л.) (в соавторстве с Кучинским К., вклад автора – 0.15 п.л.).

**Другие работы, опубликованные по теме диссертации:**

8. Пеникас Г.И. Прямое и перекрестное хеджирование риска на основе моделей «КОПУЛА» // Труды IX Международной конференции «Применение многомерного статистического анализа в экономике и оценке качества». Москва, М.: ГУ–ВШЭ, 2010. С. 121 – 123 (0.1 п.л.).
9. Пеникас Г.И. Анализ математических моделей Базель II. М.: Физматлит, 2010. – 288 с. (18 п.л.) (в соавторстве с Алескеровым Ф.Т., Андриевской И.К., Солодковым В.М., вклад автора – 4.5 п.л.).
10. Пеникас Г.И. Особенности управления рыночным риском коммерческого банка на основе российских данных // Труды международной юбилейной сессии научного семинара "Многомерный статистический анализ и вероятностное моделирование реальных процессов". М.: ЦЭМИ, 2009. С. 128 – 130 (0.1 п.л.).
11. Пеникас Г.И. Прогнозирование кривой доходности в задачах управления активами и пассивами банка // Труды VII-ой международной школы-семинара "Многомерный статистический анализ и эконометрика". М.: ЦЭМИ, 2008. С. 137 – 138 (0.1 п.л.).

Лицензия ЛР № 020832 от 15 октября 1993 г.

Подписано в печать «11» февраля 2011 г. Формат 60x84/16

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1.

Тираж 100 экз. Заказ № \_\_\_\_ Типография издательства ГУ – ВШЭ, 125319,  
г. Москва, Кочновский пр-д, д. 3