ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2010, том 432, № 1, с. 21–23

МАТЕМАТИКА

УДК 517.91

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА И КОНЕЧНО-ГЛАДКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ОДНИМ НУЛЕВЫМ КОРНЕМ

© 2010 г. В. С. Самовол

Представлено академиком Д.В. Аносовым 25.11.2009 г.

Поступило 10.12.2009 г.

В работе изучаются вопросы приводимости вещественной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений к резонансной нормальной форме (далее – нормальной форме) в окрестности особой точки. Речь пойдет о системах, матрица линейной части которых имеет одно нулевое собственное число, в то время как другие собственные числа лежат вне мнимой оси. Также нас будет интересовать задача конечно-гладкой эквивалентности таких систем. Данная работа является продолжением исследований, начатых в [1].

Нормальная форма систем обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно хорошо изучена. Аналитический случай исследован в работах А. Пуанкаре [2], К.Л. Зигеля [3], А.Д. Брюно [4]. В данной работе нас будет интересовать задача как о собственно нормальной форме, так и о приводимости к ней систем гладких дифференциальных уравнений. В большинстве работ, посвященных данной тематике, исследуются системы с невырожденной особой точкой (или инвариантным многообразием), в то время как даже слабо вырожденные системы весьма мало исследованы. Кроме того, большая часть работ охватывает задачи построения нормализующих преобразований конечной или бесконечной гладкости. Однако, как показывает анализ, ограничиваясь этим классом преобразований, не удается получить ответы на важные вопросы о свойствах частично вырожденных систем, в частности систем с одним нулевым корнем. Поэтому мы рассмотрим класс преобразований с особенностями и покажем, что с помощью таких преобразований можно получить весьма полезную информацию как о нормальной форме системы, так и о гладкой эквивалентности систем. По поводу частично вырожденных систем см. [5]. В работах [6, 7] показано, что из формальной эквивалентности следует бесконечно гладкая эквивалентность систем с одним нулевым корнем или двумя чисто мнимыми корнями матрицы линейной части. В данной работе будет решена проблема конечно-гладкой эквивалентности, а именно будет доказана такая эквивалентность для систем, ряды Тейлора которых отличаются членами достаточно высокого порядка, т.е. решена задача о конечной определенности ростков рассматриваемых векторных полей. Этот результат является аналогом теоремы Стернберга–Ченя для систем с одним нулевым корнем (см. теорему 12.2 из [8]). В сообщении будет существенно уточнено понятие резонанса для рассматриваемых систем и показана возможность приведения этих систем к полиномиальной резонансной нормальной форме.

Рассмотрим вещественную автономную систему

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = Q(\xi), \qquad (1)$$

где $\xi, Q(\xi) \in R^{n+1}$, $n > 0$, $Q(\xi)$ – функция класса C^∞ в некоторой окрестности начала координат, $Q(0) = 0$, матрица $A = Q'(0)$ имеет n собственных чисел, лежащих вне мнимой оси, и одно нулевое собственное число. Цель данной работы состоит в определении вида нормальной формы такой системы уравнений и в выяснении условий существования преобразования, приводящего систему (1) к нормальной форме в некоторой окрестности начала координат. Кроме того, нас будет интересовать задача существования локального конечно-гладкого преобразования, приводящего две системы указанного вида друг к другу.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – ненулевые собственные числа матрицы A, $\lambda_0 = 0$. С помощью стандартного линейного преобразования приведем систему (1) к следующему виду, где матрица A имеет жорданову форму:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x, y), \\ \dot{y}_i &= \varepsilon_i y_{i-1} + \lambda_i y_i + f_i(x, y), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \qquad (2)$$

Ниже координаты y_i будем называть невырожденными, а координату x – вырожденной. Известно, что без ограничения общности (за исключением случая, когда $g(x, 0)$ – плоская функция)

Государственный университет – Высшая школа экономики, Москва