

Черные лебеди и биржа

Алескеров Ф.Т., Егорова Л.Г.

В работе [1], анализируя причины финансовых кризисов, автор делает вывод о том, что современные экономические модели плохо описывают реальность, так как не умеют предсказывать такие кризисы. Соответственно, и люди, которых эти модели ничему не учат, не умеют такие кризисы распознавать заранее.

Мы попытались представить процессы, происходящие на бирже, в виде двух случайных процессов, один из которых происходит часто (нормальный режим), а другой – редко (кризис). Ответ, который мы получили, сводится к следующему – если частые, регулярные процессы распознаются правильно даже с вероятностью чуть выше $1/2$, это позволяет почти всегда иметь положительный средний выигрыш. Нам представляется, что именно это лежит в основе нежелания людей все время ожидать кризисы и пытаться распознать их.

Ключевые слова: финансовые кризисы; биржа; Пуассоновский процесс.

1. Введение

Н.Н. Талев [1], анализируя причины финансовых кризисов, делает вывод о том, что современные экономические модели плохо описывают реальность, так как не

Ф.Т. Алескеров выражает искреннюю признательность А.А. Яковлеву, который подарил ему книгу [1]; несогласие с некоторыми выводами этой книги стимулировало создание предлагаемых моделей. Авторы так же благодарны А.В. Белянину, Е.Р. Горяиновой, Д.Ю. Голембиовскому, К. Пател, Г.И. Пеникасу, В.В. Подиновскому, К. Зейдлу, П. Хаммонду и А.А. Яковлеву за ценные замечания и комментарии.

Мы благодарны также за финансовую поддержку Лаборатории анализа и выбора решений НИУ ВШЭ и Научному Фонду НИУ ВШЭ (грант №10-04-0030).

Кроме того, Ф. Алескеров благодарен Колледжу Магдалины Кембриджского университета (Великобритания), во время пребывания в котором была закончена эта работа, и профессору Канак Пател за радушие и гостеприимство.

Алескеров Ф.Т. – ординарный профессор Государственного университета – Высшей школы экономики, заведующий кафедрой высшей математики на факультете экономики, научный руководитель Отделения прикладной математики и информатики, заведующий Лабораторией анализа и выбора решений Государственного университета – Высшей школы экономики. E-mail: fuadaleskerov2001@yahoo.com

Егорова Л.Г. – преподаватель кафедры высшей математики на факультете экономики, сотрудник Лаборатории анализа и выбора решений Государственного университета – Высшей школы экономики. E-mail: lyude@inbox.ru

Статья поступила в Редакцию в октябре 2010 г.

умеют предсказывать такие кризисы. Все неординарные события, в частности, кризисы, автор называет Черными лебедями. Он пишет:

«До открытия Австралии жители Старого Света были убеждены, что все лебеди – белые. Их непоколебимая уверенность вполне подтверждалась опытом. Встреча с первым черным лебедем, должно быть, сильно удивила орнитологов (и вообще всех, кто почему-либо трепетно относится к цвету птичьих перьев), но эта история важна по другой причине. Она показывает, в каких жестких границах наблюдений или опыта происходит наше обучение и как относительно наши познания. Одно-единственное наблюдение может перечеркнуть аксиому, выведенную на протяжении нескольких тысячелетий, когда люди любовались только белыми лебедями. Для ее опровержения хватило одной (причем, говорят, довольно уродливой) черной птицы.

...То, что мы будем называть Черным лебедем (с большой буквы!), – это событие, обладающее следующими тремя характеристиками.

Во-первых, оно *аномально*, потому что ничто в прошлом его не предвещало. Во-вторых, оно обладает огромной силой воздействия. В-третьих, человеческая природа заставляет нас придумывать объяснения случившемуся *после* того, как оно случилось, делая событие, сначала воспринятое как сюрприз, объяснимым и предсказуемым.

Остановимся и проанализируем эту триаду: исключительность, сила воздействия и ретроспективная (но не перспективная) предсказуемость. Эти редкие Черные лебеди объясняют почти все, что происходит на свете, – от успеха идей и религий до динамики исторических событий и деталей нашей личной жизни. С тех пор как мы вышли из плейстоцена – примерно десять тысяч лет назад, – роль Черных лебедей значительно возросла. Особенно интенсивный ее рост пришелся на время промышленной революции, когда мир начал усложняться, а повседневная жизнь – та, о которой мы думаем, говорим, которую стараемся планировать, основываясь на вычитанных из газет новостях, – сошла с наезженной колеи.

...Главное, о чем говорится в этой книге, – это наша слепота по отношению к случайности, особенно крупномасштабной; почему мы, ученые и неучи, гении и посредственности, считаем гроши, но забываем про миллионы? Почему мы сосредотачиваемся на мелочах, а не на возможных значительных событиях, несмотря на их совершенно очевидное гигантское влияние?» [1, Пролог, с. XVII–XIX].

Таким образом, автор утверждает, что современные науки почти не обладают инструментами для предсказания таких неординарных событий. Более того, он дает следующую достаточно резкую характеристику современного экономического знания.

«В ортодоксальной экономике рациональность превратилась в самую настоящую смирительную рубашку. Платонизирующие экономисты забывают о том, что жизнь людей не сводится лишь к тому, чтобы максимально удовлетворить свои экономические интересы. Подобная забывчивость приводит к возникновению таких математических методов, как “максимизация”, или “оптимизация”, на которой Пол Самуэлсон построил значительную часть своей работы. ...В этом методе полно сложной математики, поэтому ученым без математической подготовки вход воспрещен. Я не первый говорю, что эта оптимизация отбросила назад социальные науки: из развивающейся отрасли знаний для умных и мыслящих людей они превратились в пародию на “точную науку”» [1, с. 184].

«...Первыми, кто начал играть в “формальное мышление”, фабрикуя липовые послышки с целью породить “точные” теории, были Пол Самуэлсон, наставник Мерто-

на, и, в Соединенном королевстве, Джон Хикс. Эти двое загромили идеи Джона Мэйнарда Кейнса своей попыткой их формализовать (Кейнс интересовался неопределенностью и сетовал, что жесткие модели сужают кругозор). Поборниками формального мышления были также Кеннет Эрроу и Жерар Дебре. Все четверо – нобелиаты. ...Всех их можно смело обвинить в создании воображаемого мира, в котором их математика – неограниченная властительница» [1, с. 283].

Не будучи адептами каких-либо специальных взглядов¹, имеющих хождение в экономическом сообществе, мы попытались представить процессы, происходящие на бирже, в виде двух случайных процессов, один из которых происходит часто (нормальный режим), а другой – редко (кризис).

Далее мы оценили средний выигрыш при различных вероятностях правильного распознавания этих процессов и применили полученные оценки для реальных процессов на бирже. Кратко, ответ, который мы получили, сводится к следующему – если частые, регулярные процессы распознаются правильно даже с вероятностью чуть выше $1/2$, это позволяет почти всегда иметь положительный средний выигрыш. Нам представляется, что именно данное явление лежит в основе нежелания людей все время ожидать кризисы и пытаться распознать их.

Работа строится следующим образом. В разделе 2 предлагается постановка задачи и решение, в разделах 3 и 4 исследуются условия, при которых средний выигрыш будет неотрицательным. В разделе 5 рассматривается применение модели к реальным данным, раздел 6 содержит заключение. В Приложении 1 дан вывод формулы для величины математического ожидания, в Приложении 2 рассматриваются оценки параметров для различных биржевых индексов, Приложение 3 посвящено альтернативным расчетам параметров модели.

2. Постановка задачи

На устройство поступает поток событий двух типов – типа Q (от слова *quiet*) и типа R (*rare*). Каждый из них является простейшим, т.е. стационарным, ординарным и не имеет последствия [2]. Интенсивность потока событий типа Q равна λ , интенсивность потока событий типа R равна μ , причем $\lambda \gg \mu$ (события типа Q происходят гораздо чаще событий типа R).

Задача устройства заключается в распознавании наступившего события X . Если наступило событие Q , и устройство его идентифицировало верно, то оно поощряется получением небольшого вознаграждения a ; если же произошла ошибка, и событие Q было распознано как событие R , то устройство будет «оштрафовано» на величину b . Вероятности таких исходов известны и равны p_1 и q_1 соответственно. Аналогично, для событий типа R при правильной идентификации устройством наступившего события R выигрыш составляет величину c , причем $c \gg a$, а при неправильной – «проигрыш» составляет $-d$, и $d \gg b$. После каждого наступившего собы-

¹ Надо сказать, что один из авторов этой работы – Ф. Алескерев – познакомился в 1984 г. с профессором Полом Самуэльсоном, а профессор Кеннет Эрроу оказал на него самое непосредственное и сильное воздействие.

тия величина полученного выигрыша/проигрыша прибавляется к предыдущей сумме (рис. 1).

Сколько в среднем будет составлять сумма полученных за время t выигрышей?

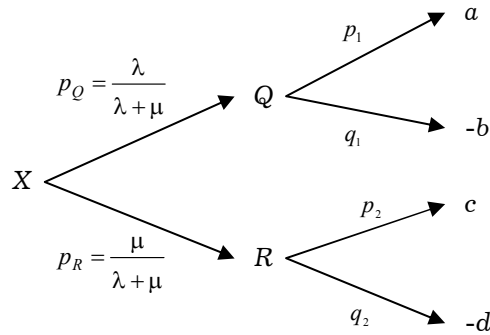


Рис. 1. Общая схема идентификации случайного события X

Одна из возможных реализаций случайного процесса $Z(t)$, равного сумме всех полученных к моменту t значений разыгранной случайной величины X , приведена на рис. 2.

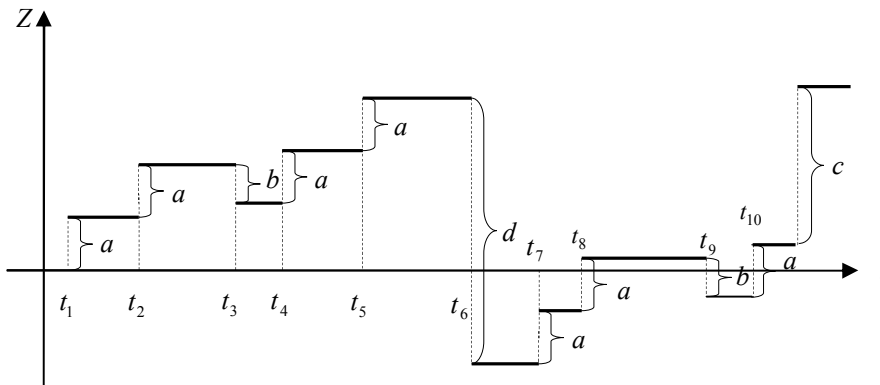


Рис. 2. Одна из возможных реализаций случайного процесса $Z(t)$

Случайная величина Z общей суммы полученных выигрышей за время t является сложной пуассоновской величиной, поскольку количество слагаемых в сумме $Z = \sum X_i$ тоже является случайной величиной и зависит от потока событий, поступивших на устройство. Приведем выражение для математического ожидания случайной величины выигрыша Z (см. Приложение 1)

$$E(Z) = (\lambda t)E(W_1) + (\mu t)E(Y_1) = \lambda t((1 - q_1)a - q_1 b) + \mu t((1 - q_2)c - q_2 d).$$

3. Исследование решения при заданных величинах q_1 и q_2

Исследуем, когда математическое ожидание Z неотрицательно. Пусть величины q_1 и q_2 являются известными и заранее заданными. При каких значениях параметров выполняется условие $E(Z) = ((1 - q_1)\lambda a - q_1\lambda b + (1 - q_2)\mu c - q_2\mu d)t \geq 0$?

Учитывая, что $t > 0$ и $\mu > 0$, получим

$$(a - q_1a - q_1b)\frac{\lambda}{\mu} + (c - q_2c - q_2d) \geq 0.$$

Так как $E(W_1) = a - q_1a - q_1b$ – ожидаемый выигрыш от наступления события типа Q , а $E(Y_1) = c - q_2c - q_2d$ – ожидаемый выигрыш от наступления R -события, то мы можем представить зависимость решения от этих параметров в табл. 1.

Таблица 1.

Условия неотрицательности ожидаемого выигрыша

		$E(W)$		
		< 0	$= 0$	> 0
$E(Y)$	< 0	$E(Z) < 0$	$E(Z) < 0$	для $E(Z) \geq 0$ требуется $\frac{\lambda}{\mu} \geq -\frac{E(Y)}{E(W)}$
	$= 0$	$E(Z) < 0$	$E(Z) = 0$	$E(Z) \geq 0$
	> 0	для $E(Z) \geq 0$ необходимо $\frac{\lambda}{\mu} \leq -\frac{E(Y)}{E(W)}$	$E(Z) \geq 0$	$E(Z) \geq 0$

Предположим, что $\lambda = 246$, $\mu = 4$. Если выбрать $E(W)$ – математическое ожидание выигрыша от наступления события типа Q – равным единице, то каким должен быть ожидаемый выигрыш $E(Y)$ от наступления события типа R ?

Согласно табл. 1, для этого необходимо выполнение неравенства $E(Y) \geq -61,5$, т.е. накапливая даже крохотный ожидаемый выигрыш в одну единицу при условии частого наблюдения, мы можем покрыть огромные расходы, случающиеся достаточно редко.

4. Исследование решения при неизвестных q_1 и q_2

Пусть теперь параметры q_1 и q_2 являются неизвестными. При каких условиях на q_1 и q_2 математическое ожидание $E(Z)$ будет неотрицательным при заданных остальных параметрах?

Учитывая, что q_1 и q_2 – вероятности неправильно распознать события типа Q и R , необходимо решить систему неравенств

$$\begin{cases} E(Z) = [\lambda((1-q_1)a - q_1b) + \mu((1-q_2)c - q_2d)]t \geq 0, \\ 0 \leq q_1 \leq 1, \\ 0 \leq q_2 \leq 1, \end{cases}$$

при условиях на параметры $a, b, c, d \geq 0$, $\lambda, \mu, t > 0$, $a + b > 0, c + d > 0$ (последние два неравенства означают, что одновременно a и b , c и d не могут равняться нулю – иначе задача вырождается).

Решением будет область значений q_1 и q_2 , заданная следующим образом:

$$\begin{cases} 0 \leq q_1 \leq \min\left\{1, \frac{\lambda a + \mu c}{\lambda(a+b)}\right\}, \\ 0 \leq q_2 \leq 1 \text{ при } 0 \leq q_1 \leq \min\left\{1, \frac{\lambda a - \mu d}{\lambda(a+b)}\right\}, \\ 0 \leq q_2 \leq -\frac{\lambda(a+b)}{\mu(c+d)}q_1 + \frac{\lambda a + \mu c}{\mu(c+d)} \text{ при } \max\left\{1, \frac{\lambda a - \mu d}{\lambda(a+b)}\right\} \leq q_1 \leq \min\left\{1, \frac{\lambda a + \mu c}{\lambda(a+b)}\right\}. \end{cases}$$

В зависимости от значений q_1 и q_2 область может иметь разные конфигурации (рис. 3):

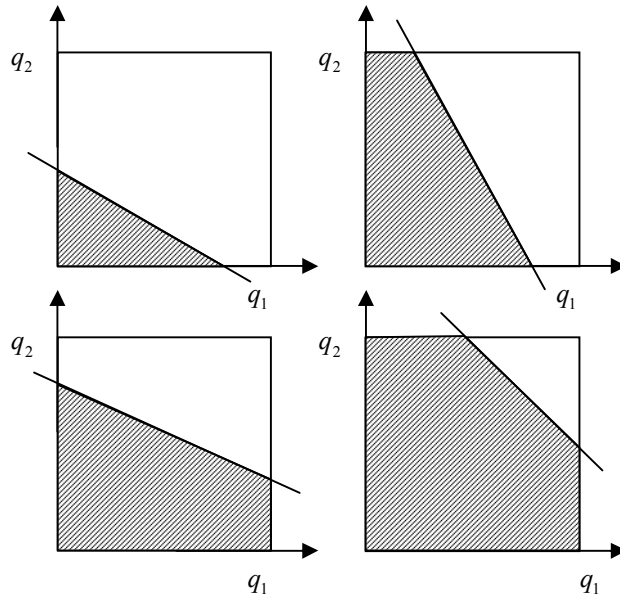


Рис. 3. Примеры возможной области определения параметров

Рассмотрим пример. Пусть для простоты $b = a, d = c$. Зададим параметры $a = 10, c = 10000, \lambda = 250, \mu = 0,1, t = 10$.

Чтобы найти, какие значения параметров q_1 и q_2 задают $E(Z) \geq 0$, необходимо решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leq q_1 \leq \frac{7}{10}, \\ 0 \leq q_2 \leq 1 \text{ при } 0 \leq q_1 \leq \frac{3}{10}, \\ 0 \leq q_2 \leq -\frac{5}{2}q_1 + \frac{7}{4} \text{ при } \frac{3}{10} \leq q_1 \leq \frac{7}{10}. \end{cases}$$

Графически эти неравенства отделяют область (рис. 4) на плоскости q_1 и q_2 , в которой ожидаемый выигрыш $E(Z)$ будет неотрицательным.

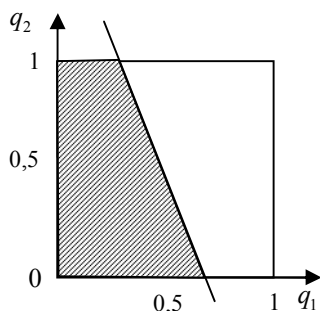


Рис. 4. Область значений q_1 и q_2 , при которых $E(Z)$ неотрицателен

5. Применение к реальным данным

Пусть исследуемое устройство – это биржа, события Q и R – это «спокойная жизнь» и «кризис». Согласно модели, события Q происходят чаще, чем R , что соответствует тому, что кризис в нашей жизни, к счастью, явление редкое.

Событие X можно интерпретировать как некий сигнал, который поступает брокеру на бирже о состоянии экономики, о котором он должен решить, что означает этот сигнал – что экономика находится в «нормальном режиме», либо наступает кризис. Например, являются ли сведения о том, что снизились цены на нефть, предвестником того, что экономика переживает спад, или это временное явление, и на состояние экономики они не повлияют?

Величины a, b, c, d также имеют свое значение в такой интерпретации. Если наступило событие Q (экономика стабильна) и брокер его правильно распознал, то

он может получить за это небольшой доход – величину a . Если событие Q будет принято за R , то он понесет небольшие потери ($-b$). Если же наступило событие R (кризис) и оно не было распознано верно, то брокер понесет потери, намного большие – сумму ($-d$). Если же он «угадает» наступление кризиса, то сможет на этом неплохо заработать – в случае правильной идентификации R брокер получает величину c .

Попробуем теперь оценить параметры модели, прежде всего интенсивности потоков этих событий. Параметры λ и μ , по сути, показатели состояния экономики, поэтому для их оценки возьмем фондовый индекс S&P 500, в корзину которого включено 500 избранных акционерных компаний США, имеющих наибольшую капитализацию. Список принадлежит компании Standard & Poog's и ею же составляется [6].

Будем использовать для этого временной ряд доходности фондового индекса. Рассмотрим временной интервал, равный 10 годам – с 1999 по 2009 г. (более точно: с августа 1999 г. до декабря 2009 г.). В качестве значения индекса за день возьмем среднее арифметическое от значения открытия и закрытия.

Чтобы понять, когда наступают проблемы в экономике и начинается спад, построим значения волатильности индекса со скользящим интервалом в 20 дней, т.е. для каждого дня возьмем предыдущие 20 значений индекса S_i и подсчитаем стандартное отклонение от выборочного среднего \bar{S} для этой выборки

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{1}{19} \sum_{i=j-20}^j (S_i - \bar{S})^2}, j = 21, 22, \dots$$

Примем в качестве ориентира, что если значение волатильности превышает 6%, то это означает наступление событие типа R , т.е. кризис. На рис. 5 видно, что высокие значения волатильности соответствуют падению индекса. Альтернативный метод нахождения «кризисных дней» дан в Приложении 3.

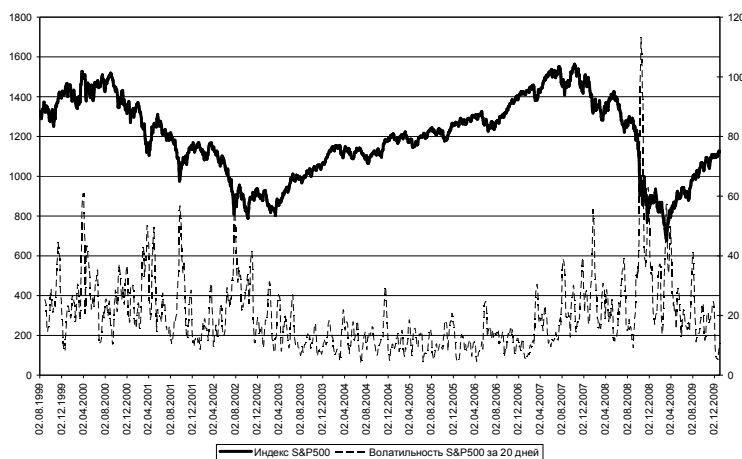


Рис. 5. Индекс S&P500 и волатильность

Для этих данных (с августа 1999 г. по декабрь 2009 г.) количество превышений 6-процентного барьера составляет 42 из 2645 значений (1,6%), т.е. $\mu = 4$ за год (берем среднее число рабочих дней в году – 250 рабочих дней), а $\lambda = 246$ за год.

Таким образом, по нашей оценке, за год в среднем бывает 246 «спокойных дней» и 4 дня, характеризующихся высокой волатильностью и падением индекса. Для барьера в 10% соответствующие оценки равняются 249 и 1 соответственно.

Для анализа на стационарность выбирались периоды, соответствующие только регулярным или только кризисным дням; для проверки использовался тест Дики – Фуллера на наличие единичного корня и анализ автокорреляционной и частной автокорреляционной функции [3]. Ряды являются стационарными как на небольших выборках (порядка 10–20 точек), так и в течение длительного периода (несколько лет) событий только одного типа.

Теперь оценим величины отдельных выигрышей/проигрышей. В точках, соответствующих событию Q (что определяется по значению волатильности индекса – она должна быть меньше порогового значения для события Q), оценим a и b . Если в этот момент индекс пошел вверх, значит, реализовалось событие a , а если вниз – то $(-b)$. Аналогично с событиями типа R , которые мы определили как превышение волатильности над пороговым значением: если индекс увеличился по сравнению с предыдущим значением, то изменение считаем за величину c , если индекс упал, то на d пунктов. В полученных выборках подсчитаем среднее и примем их за оценки соответствующих величин выигрышей/проигрышей.

В табл. 2. приведены значения параметров модели для пороговых значений 6% и 10%.

Таблица 2.

Оценка параметров модели для индекса S&P500
(август 1999 г. – декабрь 2009 г.; $n = 2664$ наблюдения)

	λ	μ	a	$-b$	c	$-d$
Пороговое значение волатильности						
6%	246	4	7	-8	24	-26
10%	249	1	7	-8	35	-29

Для таких оценок параметров можно посмотреть, какими должны быть вероятности ошибиться при идентификации, так чтобы ожидаемый выигрыш брокера был неотрицательным. Для порога 6% область выглядит так, как показано на рис. 6.

Как видно, вероятность ошибиться при распознавании частых событий оказывает несравненно более сильное влияние на ожидаемый выигрыш, что неудивительно при таких значениях остальных параметров. Фактически, достаточно распознавать события типа Q в половине случаев для обеспечения положительного результата всей игры.

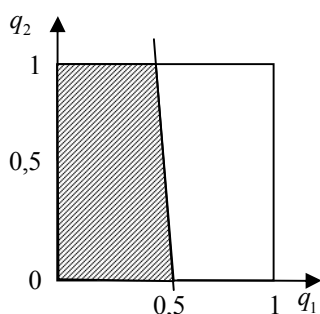


Рис. 6. Область параметров q_1 и q_2 , дающих неотрицательный ожидаемый выигрыш

Действительно, если выбрать горизонт в один год и вероятность ошибок для событий Q и R равными $q_1 = 0,46$, $q_2 = 1$ (т.е. кризисы распознавать не удастся), ожидаемый доход будет неотрицателен. Естественно, ожидаемый доход будет увеличиваться с уменьшением q_1 и q_2 .

6. Заключение

Защищая экономическую науку, в заключение отметим, что Р. Шиллер [5] предсказал оба кризиса 2000 и 2005 гг., однако его слова всерьез восприняты не были.

В работе [4] справедливо указывается, что «...хотя в книге Галеба, в основном, говорится о статистических моделях, особенно в финансах, мы должны уделять больше внимания маловероятным серым лебедям. Но было бы более интересно, хотя и намного более сложно, обсудить случаи действительно аномальных черных лебедей, которым не соответствует никакое распределение вероятностей, поскольку модель, которой мы пользуемся, даже не допускает их использование»².

Вместо анализа таких вероятностей в рамках очень простой модели мы показали, что при небольшом вознаграждении за правильное (с вероятностью чуть больше 1/2) распознавание частых событий (и при том, что кризисные события распознаются с очень малой вероятностью) средний выигрыш игрока будет положительным. Иначе говоря, игрокам нет необходимости играть в более сложные игры, пытаясь распознать кризисные события заранее.

Этот вывод вполне согласуется с логикой осторожного поведения, предписывающей почти надежное получение малых выигрышей. Отметим, однако, что эти выводы были получены при одинаковых (нулевых) начальных капиталах игроков. Ни обучение, ни рискованное поведение при значительных начальных капиталах нами не учитывались.

² Перевод Ф. Алескерова.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Талб Н.Н.* Черный лебедь. Под знаком непредсказуемости. М.: КоЛибри, 2010.
2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1 и 2. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010.
3. *Hamilton J.D.* Time Series Analysis. Princeton: Princeton University Press, 1994.
4. *Hammond P.* Adapting to the Entirely Unpredictable: Black Swans, Fat Tails, Aberrant Events, and Hubristic Models. University of Warwick, 2010. (<http://www2.warwick.ac.uk/fac/soc/economics/research/centres/eri/bulletin/2009-10-1/hammond/>)
5. *Shiller R.* Irrational Exuberance. Princeton University Press, 2000. (2nd ed. – 2005).
6. <http://finance.yahoo.com/marketupdate?u> – исторические данные об индексах.

Приложение 1.

Вывод формулы математического ожидания

Рассмотрим потоки отдельно. Если бы в устройство поступали только события первого типа Q , то за время t суммарная величина полученного выигрыша равнялась бы

$$Z_Q = \sum_{i=1}^{N_Q} W_i,$$

где все W_i представляют собой случайную величину выигрыша при наступлении события Q и распределены одинаково: они принимают значение a с вероятностью p_1 и значение $(-b)$ с вероятностью q_1 ; а N_Q – количество наступивших за время t событий типа Q , оно распределено по закону Пуассона (закон редких событий) с параметром λt (так как поток событий первого типа является простейшим потоком) [2].

Такая сумма, состоящая из пуассоновского числа N_Q слагаемых, где N_Q и W_i независимы в совокупности, называется сложной пуассоновской случайной величиной. Ее распределение задается парой $P(\lambda t; F_1(x))$, а явный вид функции распределения получается применением формулы полной вероятности с гипотезами $\{N_Q = m\}$.

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P\{W_1 + \dots + W_m \leq x\} P\{N_Q = m\} = \sum_{m=0}^{\infty} F_1^{(m)}(x) \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t},$$

где $P\{N_Q = m\} = P_m(t) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}$, $F_1^{(m)}(x)$ – m -кратная свертка $F_1(x)$.

Тогда математическое ожидание случайной величины Z_Q равно

$$\begin{aligned} EZ_Q &= \sum_{j=0}^{\infty} E(Z | N_Q = j) P\{N_Q = j\} = \sum_{j=0}^{\infty} E(jW_1) P\{N_Q = j\} = E(W_1) \sum_{j=0}^{\infty} j P\{N_Q = j\} = \\ &= E(W_1) E(N_Q) = (p_1 a - q_1 b)(\lambda t). \end{aligned}$$

Аналогично рассматривается поток событий типа R . Выигрыш от поступления событий второго типа за время t равен

$$Z_R = \sum_{i=1}^{N_R} Y_i,$$

где все Y_i распределены одинаково: они принимают значение c с вероятностью p_2 и значение $(-d)$ с вероятностью q_2 ; а N_R распределено по закону Пуассона с параметром μt . Тогда математическое ожидание случайной величины Z_R равно

$$EZ_R = E(Y_1) E(N_R) = (p_2 c - q_2 d)(\mu t).$$

Важное свойство сложного пуассоновского распределения состоит в том, что распределение суммы таких независимых величин опять принадлежит тому же классу.

Так как $Z_Q \sim P(\lambda t; F_1(x))$ и $Z_R \sim P(\mu t; F_2(x))$, то

$$Z = Z_Q + Z_R \sim P((\lambda + \mu)t; G(x)),$$

где $G(x) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} F_1(x) + \frac{\mu}{\lambda + \mu} F_2(x)$.

Учитывая заданные неравенства $\lambda \gg \mu, c \gg a, d \gg b$, получим

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x < -d, \\ \frac{\mu q_2}{\lambda + \mu}, & -d \leq x < -b, \\ \frac{\lambda q_1 + \mu q_2}{\lambda + \mu}, & -b \leq x < a, \\ \frac{\lambda + \mu q_2}{\lambda + \mu}, & a \leq x < c, \\ 1, & x \geq c. \end{cases}$$

Математическое ожидание случайной величины $Z = Z_Q + Z_R$ равно

$$E(Z) = (\lambda t)E(W_1) + (\mu t)E(Y_1) = \lambda t((1 - q_1)a - q_1 b) + \mu t((1 - q_2)c - q_2 d).$$

Приложение 2.

Расчет показателей для других фондовых индексов

Рассчитаем такие же показатели и для других индексов – французского CAC 40, немецкого DAX, японского Nikkei 225 и гонконгского Hang Seng. Возьмем порог превышения в 6% и сравним значения параметров, полученных для каждого из индексов.

Таблица П2.1.

Сводные оценки параметров индексов
для 6-процентного порога

Индекс	λ	μ	a	$-b$	c	$-d$
S&P 500	246	4	7	-8	24	-26
CAC 40	243	7	35	-39	96	-85
DAX	239	11	39	-45	87	-102
Nikkei 225	245	5	102	-112	232	-299
Hang Seng	241	9	148	-148	390	-481

Большое расхождение в оценках параметров a, b, c, d вызвано тем, что для оценивания брались изменения абсолютной доходности индексов и все величины a, b, c, d измеряются в пунктах. Пересчитав эти показатели для относительных изменений каждого индекса, получим практически одинаковые значения (табл. П2.2).

Таблица П2.2.

Сводные оценки параметров индексов (относительные изменения)
для 6-процентного порога, %

Индекс	a	$-b$	c	$-d$
S&P 500	0,6	-0,6	2,8	-2,9
CAC 40	0,8	-0,8	3,0	-2,5
DAX	0,8	-0,9	2,1	-2,5
Nikkei 225	0,8	-0,9	2,6	-3,2
Hang Seng	0,9	-0,9	2,6	-3,0

Видно, что в процентном соотношении оценки параметров для индексов примерно равны – в спокойный период индекс колеблется с размахом в 0,8–0,9%, в кризисное время амплитуда увеличивается приблизительно в 4 раза.

Необходимо отметить, что эти данные должны отражать изменение индекса в процентах к уровню предыдущего дня, а не скачки индекса за один день в ходе торгов. Подобные изменения могут быть значительно больше, например, 17 апреля 2000 г. разность между наивысшим и наиболее низким значениями индекса японского Nikkei 225 составила почти 100 пунктов (приблизительно 10%). Однако по сравнению со значением Nikkei за предыдущий день 16 апреля падение составило всего 3,8%.

Приложение 3.

Альтернативные расчеты параметров модели

Волатильность не является, конечно, единственным показателем поведения рынка и сигналом кризисных явлений. При оценке волатильности естественным образом встает вопрос о расчетном периоде. Уменьшение периода обеспечивает рост вероятности ошибки в оценке волатильности, поскольку она сама приобретает повышенную изменчивость. Удлинение периода снизит ее, но обусловит рост вероятности получения запоздалых сведений о рынке. Возможно, это присутствует и в наших расчетах, так как появится погрешность в оценках c и d , требующих точной даты кризисного дня.

Проведем такие же расчеты, как в разделе 5, для оценки параметров модели λ, μ, a, b, c, d , используя вместо волатильности доходность индекса

$$r_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}, i = 2, \dots, 2665.$$

Как видно из рис. П3.1, падение индекса немедленно отражается на его доходности, точнее на ее амплитуде. Полученные оценки всех параметров приведены в табл. П3.1.

Таблица П3.1.

Значения параметров индекса S&P500
(август 1999 г. – декабрь 2009 г.; $n = 2664$ наблюдения)

	λ	μ	a	$-b$	c	$-d$
Пороговое значение волатильности						
3%	246	4	7	-7	40	-39
4%	248	2	7	-7	45	-50
5%	249	1	7	-8	-47	-51

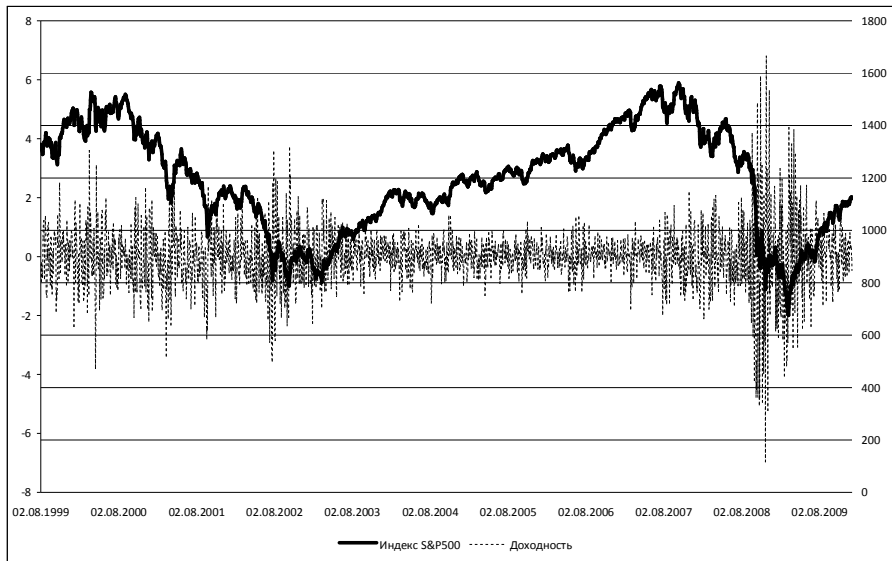


Рис. ПЗ.1. Индекс S&P 500 и его доходность

Как видно, доходность также может служить «мерилом» состояния индекса.

Кроме того, использование средних оценок на таком большом промежутке времени неизбежно огрубляет расчеты. Любопытно посмотреть на распределение по годам кризисных событий (табл. ПЗ.2). Отсутствие чисел означает отсутствие в указанный период скачков волатильности более 6%, т.е. «спокойную жизнь» и отсутствие потрясений на рынке.

Таблица ПЗ.2.

**Оценка параметров модели по годам
с использованием волатильности с 6-процентным порогом**

	1999 г.	2000 г.	2001 г.	2002 г.	2003 г.	2004 г.	2005 г.	2006 г.	2007 г.	2008 г.	2009 г.
Оценка											
<i>a</i>	8	11	8	8	5	5	4	5	7	11	8
<i>b</i>	-9	-11	-9	-8	-5	-4	-4	-4	-7	-12	-9
<i>c</i>				17						30	14
<i>d</i>				-25						-30	-15