Задачи по комплексному анализу 2, 15.2.2011–8.3.2011

1. Докажите теорему Руше: пусть $f(z), g(z)$ — голоморфные в области D функции; γ — граница компакта K, содержащегося в области D. Если $|f(z)| > |g(z)|$ при $z \in \gamma$, то число нулей $f(z)+g(z)$ в K равно числу нулей $f(z)$ в K. Например, если $f(z)$ голоморфна в области, содержащий круг $|z| \le 1$, и $|f(z)| < 1$ при $|z| = 1$, то уравнение $f(z) = z^n$ имеет ровно n решений в круге $|z| < 1$.

2. Пусть $f(z)$ голоморфна в круге $|z| < 1$, и $f(0) = 0$. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ равномерно сходится на каждом компакте этого круга.

3. Пусть $f_n(z)$ — последовательность функций, голоморфных в области D, равномерно сходящаяся на каждом компакте к функции $f(z)$, не равной тождественно нулю. Пусть γ — граница компакта $K \subset D$, и $f(z) \ne 0$ на γ. Докажите, что a) существует N т.ч. при $n \ge N$ функции $f_n(z)$ не обращаются в нуль на γ, и число нулей f_n и f в K одинаково; b) если $f(a) = 0$, то найдется последовательность (a_n), сходящаяся к a т.ч. $f_n(a_n) = 0$.

4. Пусть $\mathrm{Im}\tau > 0$, $q = \exp(\pi i \tau)$. Докажите, что a) следующие ряды сходятся равномерно на каждом компакте $\mathbb{C}$: $\theta_0(u) := \sum_{-\infty<n<\infty} (-1)^n q^{n^2} \exp(2\pi n i u)$; $\theta_1(u) := -i\sum_{-\infty<n<\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \exp((2n+1)\pi i u)$. b) верны соотношения $\theta_0(u+1) = \theta_0(u)$; $\theta_1(u+1) = -\theta_1(u)$; $\theta_0(u+\tau) = -q^{-1}\exp(-2\pi i u)\theta_0(u)$; $\theta_1(u+\tau) = -q^{-1}\exp(-2\pi i u)\theta_1(u)$; $\theta_0(u+\frac{\tau}{2}) = iq^{-1/4}\exp(-\pi i u)\theta_1(u)$. c) $\theta_0(u), \theta_1(u)$ не равны нулю тождественно.
d) Все нули $\theta_1(u)$ — это числа вида $m + n\tau$, а все нули $\theta_0(u)$ — это числа вида $m + (n+1/2)\tau$.
e) $f(u) = \prod_{n=1}^{\infty} [(1 - q^{2n-1}\exp(2\pi i u))(1 - q^{2n-1}\exp(-2\pi i u))]$ является целой функцией; f) Найдите все нули функции $f(u)$; g) Докажите, что $f(u) = c\theta_0(u)$ для некоторого c.

5. Пусть a — действительное число. Докажите, что a) $\frac{\pi i \,\mathrm{sh}\, 2\pi a}{\sin\pi(z+ai)\sin\pi(z-ai)} = \sum_{-\infty<n<\infty}(\frac{1}{z+n-ai} - \frac{1}{z+n+ai})$; b) $\frac{\pi}{a}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,2\pi a}{\mathrm{ch}\,2\pi a - \cos 2\pi z} = \sum_{-\infty<n<\infty}\frac{1}{(z+n)^2+a^2}$.

6. Докажите, что a) $\frac{\pi}{\cos\pi z} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{(n-1/2)^2 - z^2}$; b) $\pi\,\mathrm{tg}\,\pi z = 2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1/2)^2-z^2}$; c) $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$; d) $\cos\pi z = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2})$; e) $\cos\frac{\pi z}{4} - \sin\frac{\pi z}{4} = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{(-1)^n z}{2n-1})$. (Указание: $\frac{(\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2})'}{\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sin t}{\cos t}$.)

7. Числа Бернулли определяются разложением в ряд $\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$ $(B_3 = B_5 = \ldots = 0)$. Докажите, что a) $z\,\mathrm{ctg}\,z = 1 - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}B_{2k}\frac{2^{2k}z^{2k}}{(2k)!}$; b) $z\,\mathrm{ctg}\,z = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{z^2-n^2\pi^2} = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k}}{n^{2k}\pi^{2k}}$; c) $\zeta(2k) = (-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}B_{2k}\pi^{2k}$.

8. Докажите, что a) $\frac{d}{dz}(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}) + \frac{d}{dz}(\frac{\Gamma'(z+1/2)}{\Gamma(z+1/2)}) = 2\frac{d}{dz}(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)})$; b) $\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \exp(az+b)\Gamma(2z)$ для неких a, b; c) Вычислите a, b, подставив $z = \frac{1}{2}, 1$; d) $\Gamma(pz) = (2\pi)^{-(p-1)/2}p^{pz-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{p})\ldots\Gamma(z+\frac{p-1}{p})$ для целого $p \ge 2$. (Указание: Для вычисления $\Gamma(\frac{1}{p})\Gamma(\frac{2}{p})\ldots\Gamma(\frac{p-1}{p})$ используйте $\sin\frac{\pi}{p}\cdot\sin\frac{2\pi}{p}\ldots\sin\frac{p-1}{p}\pi = \frac{p}{2^{p-1}}$.)

9. Докажите, что a) интеграл $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}t^x\frac{dt}{t}$ сходится равномерно на интервале $0 < a \le x \le b$, а потому интеграл $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}t^z\frac{dt}{t}$ определяет голоморфную функцию $G(z)$ в области $\mathrm{Re}(z) > 0$; b) $\displaystyle\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^x\frac{dt}{t} = \frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$ для $x \in \mathbb{R}_{>0}$ и $n \in \mathbb{N}$; c) $e^{-t}(1 - \frac{e}{2n}t^2) \le (1-\frac{t}{n})^n \le e^{-t}$ при $0 \le t \le n$; d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^x\frac{dt}{t} = \int_0^{\infty} e^{-t}t^x\frac{dt}{t}$; e) $G(z) = \Gamma(z)$ при $\mathrm{Re}(z) > 0$; f) Определите вычеты $\Gamma(z)$ в полюсах $0, -1, -2, \ldots$.

10. a) Докажите, что если $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2z^2 + a_4z^4 + \ldots + a_{2n}z^{2n} + \ldots$ — разложение Лорана функции $\wp(z)$ в нуле, то все a_{2n} можно выразить как полиномы от a_2, a_4. b) Вычислите явно a_6, a_8.

11. Докажите, что если P — параллелограмм периодов (фундаментальная область) функции $\wp(z)$, а α, β — любые числа, то функция $\wp'(z) - \alpha\wp(z) - \beta$ имеет в P ровно 3 нуля, и их сумма лежит в решетке Ω; b) Если $u, v \in \mathbb{C}$ т.ч. $u \pm v \notin \Omega$, то можно найти такие α, β, что нули $\wp'(z) - \alpha\wp(z) - \beta$ равны $u, v, -u-v$; c) Если $u + v + w = 0$, то $\begin{vmatrix} \wp(u) & \wp'(u) & 1 \\ \wp(v) & \wp'(v) & 1 \\ \wp(w) & \wp'(w) & 1 \end{vmatrix} = 0$.

-6. Найдите ошибку в следующем выводе (верного!) равенства $-\frac{B_k}{k} = \zeta(1-k) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}$: Так как $(\frac{d}{dt})^{k-1}\exp(nt)|_{t=0} = n^{k-1}$, то

$$\zeta(1-k) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k-1}\exp(nt)\Bigg|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}\right)^{k-1}\sum_{n=1}^{\infty}\exp(nt)\Bigg|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{1-\exp(t)}-1\right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{1-\exp(t)}\right)\Bigg|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}\right)^{k-1}\left(-\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}\right)\Bigg|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}\right)^{k-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{B_n}{n}\right)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\Bigg|_{t=0} =$$

$$= -\frac{B_k}{k}.$$

Полезно знать, что $B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_8 = -\frac{1}{30},\ B_{10} = \frac{5}{66}, \ldots$