Задачи по комплексному анализу 3, 8.3.2011–1.4.2011

1. Рассмотрим функцию $f(z)$, определенную в верхней полуплоскости H равенством $u = f(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$, где интеграл берется вдоль некоторого пути, соединяющего 0 и z, и $0 < k < 1$. Выбрана однозначная ветвь квадратного корня, равная 1 при $t = 0$. Положим $K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$, $K' = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ (интегралы по действительной оси). Докажите, что a) функция $f(z)$ может быть непрерывно продолжена на замкнутую полуплоскость $\overline{H} := \{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$. b) Продолженная функция определяет отображение $\overline{H}$ на прямоугольник с вершинами $-K, K, K+iK', -K+iK'$, осуществляющее изоморфизм внутренностей. c) Определите, какие точки действительной оси переходят в вершины прямоугольника. d) Обратное преобразование $z = \operatorname{sn}(u)$ (эллиптический синус) можно продолжить до двоякопериодической функции с периодами $4K, 2iK'$ в плоскости переменного u (принцип симметрии). e) Вычислите нули и полюса $\operatorname{sn}(u)$. f) Если $\tau = iK'/K$, то найдется константа A т.ч. $\operatorname{sn}(u) = A\theta_1(\frac{u}{2K})/\theta_0(\frac{u}{2K})$.

2. Докажите, что a) функция $g(z) = \int_0^z t^{-2/3}(1-t)^{-2/3}dt$ отображает H на равносторонний треугольник со стороной $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\Gamma^3(\frac{1}{3})$. b) функция $h(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ отображает единичный круг на квадрат со стороной $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma^2(\frac{1}{4})$. c) функция $a(z) = \int_0^z (1-t^2)^{-1/3}(1+t^2)^{-2/3}dt$ отображает единичный круг на ромб с углом 60° и со стороной $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{1}{6})$. d) функция $b(z) = \int_0^z \frac{dt}{(1-t^n)^{\frac{2}{n}}}$ отображает единичный круг на правильный n-угольник со стороной $\frac{2}{\pi n}\Gamma^2(\frac{1}{n})\Gamma(\frac{n-2}{n})\sin^2\frac{\pi}{n}$. e) функция $c(z) = \int_0^z \frac{(1+t^5)^{2/5}}{(1-t^5)^{4/5}}dt$ отображает единичный круг на правильную пятиконечную звезду.

3. Докажите, что изоморфизм двух прямоугольников, переводящий вершины в вершины, и голоморфный внутри, обязательно линеен.

4. Докажите, что функция Жуковского $w =$Ж$(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ осуществляет изоморфизм a) дополнения к единичному кругу на дополнение к отрезку $[-1, 1]$. b) Внешности окружности S_α, проходящей через точки ± 1 и пересекающей действительную ось под углом α, на дополнение к дуге окружности $S_{2\alpha}$, проходящей через точки ± 1 и пересекающей действительную ось под углом 2α (имеется в виду дуга, лежащая в верхней полуплоскости). При этом изоморфизме полумесяц, заключенный между S_α и близкой окружностью, касающейся S_α в точке 1, переходит в соплю, болтающуюся на дуге $S_{2\alpha}$ и напоминающую по форме профиль крыла самолета.

5. Постройте изоморфизм a) верхней полуплоскости и верхней полуплоскости, из которой удален отрезок $[0, i]$. b) верхней полуплоскости и верхней полуплоскости, из которой удален отрезок $[0, i]$ и луч $[2i, \infty i]$. c) Внутренности правой половины лемнискаты $z^2 = 2a^2\cos 2\phi$ и единичного круга. d) Области $|z-3| > 9$, $|z-8| < 16$ и кольца между кругами $\rho < |w| < 1$ (заодно найдите ρ).

6. Для вычисления сторон в задаче 2 необходима бета-функция Эйлера $\mathrm{B}(a, b) := \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$. Докажите, что a) $\mathrm{B}(a, b) = \int_0^\infty \frac{y^a}{(1+y)^{a+b}}\frac{dy}{y}$ (подстановкой $x = \frac{y}{1+y}$). b) $\Gamma(a)/t^a = \int_0^\infty y^a e^{-ty}\frac{dy}{y}$ (подстановкой $x = ty$), а стало быть, $\Gamma(a+b)/(1+t)^{a+b} = \int_0^\infty y^{a+b}e^{-(1+t)y}\frac{dy}{y}$. c) $\Gamma(a+b)\int_0^\infty \frac{t^a}{(1+t)^{a+b}}\frac{dt}{t} = \int_0^\infty t^a\frac{dt}{t}\int_0^\infty y^{a+b}e^{-(1+t)y}\frac{dy}{y} = \int_0^\infty y^{a+b}e^{-y}\frac{dy}{y}\int_0^\infty t^a e^{-ty}\frac{dt}{t} = \int_0^\infty y^{a+b}e^{-y}\frac{\Gamma(a)}{y^a}\frac{dy}{y} = \Gamma(a)\int_0^\infty y^b e^{-y}\frac{dy}{y} =$
$= \Gamma(a)\Gamma(b)$, то есть $\mathrm{B}(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.