

Листок 15. Работа. Потенциальная энергия. Центр масс.

Задачи 1, 2, 5, 6 составляют необходимый минимум в этом листке.

1. На материальную точку действует сила, проекции которой на координатные оси выражаются как

$$F_x = 2x + y, \quad F_y = x + z^2, \quad F_z = 2yz + 1.$$

Определите, является ли эта сила консервативной. Если является, то вычислите соответствующий потенциал.

2. Путник пересекает поле из начальной точки $A = (0, 0)$ в конечную $B = (1, 1)$ за время $t = 1$, двигаясь по траектории $\vec{r}(t) = (t, t + \alpha t(1 - t))$. Все время, пока он находится в пути, в поле дует ветер. Вычислите работу, затраченную путником на преодоление сопротивления ветра, считая что сила сопротивления ветра прямо пропорциональна скорости воздуха относительно путника (то есть, это сила вязкого трения), коэффициент трения $k = 1$. Решите задачу в каждом из случаев:

- скорость ветра постоянна $\vec{v} = (0, -1)$;
- ветер постепенно нарастает $\vec{v} = (0, -t)$.

3. Материальная точка движется в полуплоскости $y > \epsilon > 0$ под действием силы, величина которой является функцией расстояния до начала координат, а направление перпендикулярно радиус-вектору точки:

$$\vec{F} \perp \vec{r} = (x, y), \quad |\vec{F}| = f(r), \quad \text{где } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- Каким должен быть вид функции $f(r)$, чтобы сила \vec{F} была консервативной? В случае, когда сила \vec{F} консервативна, вычислите соответствующий потенциал. (Указание: эту задачу удобно решать в полярных координатах).
 - Тот же вопрос для случая, когда конфигурационным пространством является вся плоскость.
4. Осесимметричное векторное поле в трехмерном пространстве инвариантно при вращениях вокруг, скажем, оси z . Докажите, что если поле потенциальной силы осесимметрично, то его потенциальная энергия имеет вид $U = U(r, z)$, где r, ϕ, z — цилиндрические координаты.
5. Два груза массой m_1 и m_2 соединены нерастяжимой нитью, перекинутой через блок, установленный на вершине клина, лежащего на гладкой горизонтальной поверхности. Под действием силы тяжести груз m_1 опускается вдоль вертикальной стенки клина вниз на расстояние h , в то время как груз m_2 скользит по боковой поверхности клина. Найти перемещение клина по горизонтальной плоскости, если угол при основании клина — α , его масса — m_3 , и в начальный момент система находилась в состоянии покоя (массой веревки и блока пренебречь).
6. Эллиптический маятник состоит из тела массы m_1 , которое может перемещаться поступательно по гладкой горизонтальной поверхности, и груза m_2 , который связан с телом невесомым стержнем длины ℓ . В начальный момент времени стержень отклонен на угол ϕ_0 от вертикали и отпущен
- без начальной скорости;

б) так, что груз m_2 приобрел начальную скорость $|\vec{v}| = v_0$, а тело m_1 покоилось. Определите смещение тела в зависимости от угла отклонения стержня ϕ и времени t .

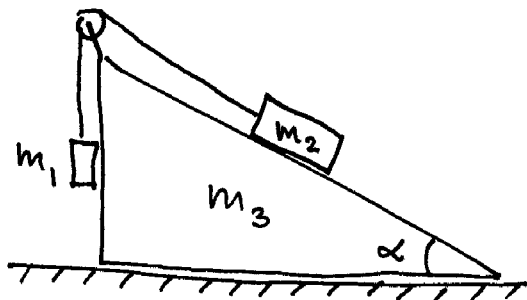


Рис. к задаче 5.

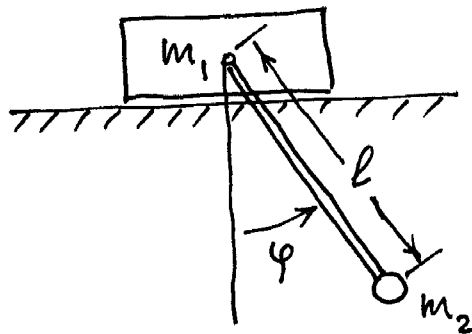


Рис. к задаче 6.