I Курс. Задание по дискретной математике №2

Дата выдачи 28.04.2011 Срок сдачи 27.05.2011

1. *(0.5 балла)* Выпишите коды Прюфера помеченных деревьев

2. *(0.5 балла)* Нарисуйте помеченные деревья, коды Прюфера которых равны
   а) $x_2x_3x_4x_5$; б) $x_3x_4x_3x_4$.

3. *(1 балл)* Найдите число помеченных деревьев с n вершинами, в которых валентность вершины с номером 1 равна k, $k = 1, 2, \dots, n-1$ (подсказка: используйте код Прюфера).

4. *(0.5 балла)* Докажите, что из чисел Гурвица $h_{m,\mu}$ с данным разбиением μ либо все числа с четным значением m, либо все числа с нечетным значением m равны нулю.

5. Вычислите числа Гурвица

   а) *(0.5 балла)* $h^{\circ}_{4;3^1}$, $h_{4;3^1}$, $h^{\circ}_{4;1^3}$, $h_{4;1^3}$; б) *(0.5 балла)* $h^{\circ}_{m;1^3}$, $h^{\circ}_{m;1^12^1}$, $h^{\circ}_{m;3^1}$ $\forall m$;

   в) *(1 балл)* $h^{\circ}_{m;2^13^1}$ $\forall m$.

6. Напомним что, присвоив переменной p_i вес i $(i = 1, 2, \dots)$, производящую функцию для простых чисел Гурвица $H^{\circ}(u; p_1, p_2, \dots)$ можно представить в виде суммы $H^{\circ} = H^{\circ}_0 + H^{\circ}_1 + H^{\circ}_2 + \dots$, где $H^{\circ}_k = H^{\circ}_k(u; p_1, p_2, \dots)$ — сумма мономов веса k в H°.

   а) *(1 балл)* Вычислите младшие весовые компоненты функции Гурвица H°_k, $k = 0, 1, 2, 3$. Выпишите уравнения транспозиции для этих компонент и убедитесь в их справедливости.

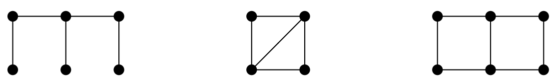
   б) *(1 балл)* Воспользовавшись уравнением транспозиции, вычислите первые 4 члена разложения функции $H^{\circ}(u; p_1, p_2, \dots)$ в ряд по u.

7. *(1 балл)* Докажите, что экспоненциальная производящая функция для числа корневых помеченных деревьев $Y(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-1}\frac{s^n}{n!}$ и экспоненциальная производящая функция для числа помеченных деревьев с двумя корнями $Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^n\frac{s^n}{n!}$ связаны соотношением

$$Z(s) = \frac{Y(s)}{1 - Y(s)}.$$

8. *(1 балл)* Докажите, что модуль значения хроматического многочлена в точке -1 равен числу ациклических ориентаций графа.

   Следующие пять задач относятся к следующим графам:



9. *(0.5 балла)* Сколько существует правильных раскрасок графов с рисунка в 5 цветов?

10. *(0.5 балла)* Сосчитайте размерность пространства эйлеровых подграфов, являющихся одновременно коциклами, для графов с рисунка.

11. *(0.5 балла)* Сосчитайте сложность (число остовных деревьев) для графов с рисунка.

12. *(0.5 балла)* Сосчитайте число всюду ненулевых потоков над $\mathbb{Z}_m$ в графах с рисунка. Для каждого из графов приведите пример такого потока над $\mathbb{Z}_4$ (если он существует).

13. *(0.5 балла)* Сосчитайте число совершенных паросочетаний в графах с рисунка.

В следующих задачах предполагается, что граф G неориентирован, связен, не является простым циклом и не содержит вершин степени 1. Пусть $E = \{f_i\}$ и $V = \{v_i\}$ — множества ребер и вершин G соответственно. Заменим каждое неориентированное ребро $f_j \in E$ графа G на два противоположно ориентированных ребра e_j и $e_{j+|E|} = e_j^{-1}$. Назовем замкнутым путем в графе последовательность ориентированных ребер $A = a_1 \dots a_s$, где начало ребра a_{i+1} совпадает с концом ребра a_i и $a_i \neq a_{i+1}^{-1}$ для всех $i = 1 \dots s$ (условимся, что $a_{s+1} = a_1$). Обозначим через $s = \nu(C)$ длину пути C. Классом эквивалентности пути C называется множество путей $[C] = \{a_1 a_2 \dots a_s, a_2 a_3 \dots a_s a_1, \dots, a_s a_1 \dots a_{s-1}\}$. Для замнутых путей $A = a_1 \dots a_s$ и $B = b_1 \dots b_r$ с началом в фиксированной вершине определена композиция $AB = a_1 \dots a_s b_1 \dots b_r$. Назовем замкнутый путь P простым, если $P \neq D^m$ для другого пути D и $m > 1$.

15. *(2 балла)* Определим матрицу ребер W графа G как $2|E| \times 2|E|$ матрицу, где на пересечении строки с номером i и столбца с номером j стоит переменная w_{ij}, если конец ребра e_i совпадает с началом ребра e_j и $e_i \neq e_j^{-1}$ и ноль иначе. Назовем нормой пути $C = a_1 \dots a_s$ произведение $N_E(C) = w_{a_1 a_2} w_{a_2 a_3} \dots w_{a_{s-1} a_s} w_{a_s a_1}$. Дзета-функцией ребер графа G называется функция $\zeta_E(W, G) = \prod_{[P]} (1 - N_E(P))^{-1}$, где произведение берется по всем простым путям P. Докажите, что $\zeta_E(W, G) = \det(I - W)^{-1}$, где I — единичная матрица. (Указание: используйте тождество $\det \exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$ для матрицы A.)

16. *(2 балла)* Дзета-функцией вершин графа G называется функция $\zeta_V(u, G) = \prod_{[P]} (1 - u^{\nu(P)})^{-1}$, где произведение берется по всем простым путям P. Пусть A — матрица смежности графа G (т.е. элемент A с номерами (i, j) есть количество ребер из вершины v_i в вершину v_j), Q — диагональная матрица размера $|V| \times |V|$, в которой j-й диагональный элемент есть (-1+степень вершины v_j), $b_1 = |V| - |E| + 1$ — цикломатическое число G. Докажите, что имеет место формула $\zeta_V(u, G)^{-1} = (1 - u^2)^{b_1 - 1} \det(I - Au + Qu^2)$. (Указание: воспользуйтесь предыдущей задачей, введя вспомогательные матрицы $S = (s_{ij}), T = (t_{ij}), i = 1 \dots |V|, j = 1 \dots 2|E|, s_{ij} = 1$, если вершина v_i есть начало ребра e_j и ноль иначе, а $t_{ij} = 1$, если вершина v_i — конец ребра e_j и ноль иначе.

17. (*) Докажите, что
$$\left(\frac{1}{\zeta_V(u, G)} \right)^{(b_1)} (1) = b_1! (-1)^{b_1 + 1} 2^{b_1} (b_1 - 1) C(G),$$
где $C(G)$ — сложность графа G (т. е. число остовных деревьев в G), а индекс (b_1) сверху обозначает взятие b_1-ой производной.