Листок 17. Уравнения Эйлера-Лагранжа.

Задачи 1, 2, 3а,б), 6 составляют необходимый минимум в этом листке.

1. В сферической системе координат положение точки задается расстоянием r от нее до начала координат и двумя углами θ и ϕ — зенитным и азимутальным, соответственно. Переход от сферических координат к декартовым дается формулами

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad z = r\cos\theta.$$

Вычислите кинетическую энергию свободной материальной точки массы m в сферической системе координат.

2. Две точки равной массы соединены жестким невесомым стержнем длины l. Середина этого стержня может двигаться по окружности радиуса r. Выберите для этой системы подходящие обобщенные координаты. Выразите кинетическую энергию в обобщенных координатах.

3. Составьте лагранжиан и напишите уравнения Эйлера-Лагранжа для следующих механических систем

а) для блока с двумя грузами, установленного на вершине клина, свободно перемещающегося в горизонтальном направлении (листок 15, задача 5);

б) для эллиптического маятника (листок 15, задача 6);

в) для двойного маятника, считая, что движение грузов m_1 и m_2, подвешенных на невесомых жестких стержнях длины l_1 и l_2, соответственно, происходит в вертикальной плоскости.

4. Составьте лагранжиан и напишите уравнения Эйлера-Лагранжа для сферического маятника, то есть для материальной точки в пространстве, связанной посредством жесткого невесомого стержня длины l с неподвижным центром (началом координат). В качестве обобщенных координат используйте сферические углы θ и ϕ.

а) Проинтегрируйте один раз уравнение Эйлера-Лагранжа для координаты ϕ. Какой закон сохранения при этом получается?

б) Пользуясь результатом пункта а), исключите зависимость от $\phi(t)$ из уравнения Эйлера-Лагранжа для координаты θ. Воспользовавшись интегрирующим множителем, проинтегрируйте один раз это уравнение. Какой закон сохранения получается?

5. Две материальные точки с массами m_1 и m_2 связаны нитью длины l, проходящей через отверстие в гладком столе, причем m_1 находится на поверхности стола, а m_2 висит на нити ниже поверхности стола. Предполагая, что m_2 движется строго по вертикали, выберите переменные z и ϕ в качестве обобщенных координат и составьте лагранжиан. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа.

а) Проинтегрируйте один раз уравнение Эйлера-Лагранжа для координаты ϕ. Какой закон сохранения при этом получается?

б) Пользуясь результатом пункта а), исключите зависимость от $\phi(t)$ из уравнения Эйлера-Лагранжа для координаты z. Воспользовавшись интегрирующим множителем, проинтегрируйте один раз это уравнение. Какой закон сохранения получается?

6. Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_n$ – набор независимых обобщенных координат некоторой механической системы, задаваемой лагранжианом $L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Пусть $s_1, s_2, \ldots, s_n$ — другой набор обобщенных координат для этой системы, связанный с исходным набором, так

называемыми, *точечными преобразованиями*:

$$q_i = q_i(s_1, s_2, \ldots, s_n, t).$$

Докажите, что если $s_i(t)$ – решения уравнений Эйлера-Лагранжа для лагранжиана $\mathcal{L}(s, \dot{s}, t) = L(q(s,t), \dot{q}(s,t), t)$, то $q_i(s(t), t)$ — являются решениями уравнений Эйлера-Лагранжа для лагранжиана $L(q, \dot{q}, t)$. Иными словами, уравнения Эйлера-Лагранжа инвариантны относительно точечных преобразований координат.

7. Пусть $F(q_i, t)$ – произвольная дифференцируемая функция. Покажите, что лагранжианы $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ и $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{dF(q_i,t)}{dt}$ порождают идентичные системы уравнений Эйлера-Лагранжа.

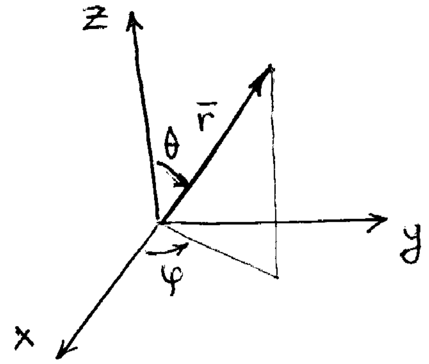

Рис. к задаче 1.

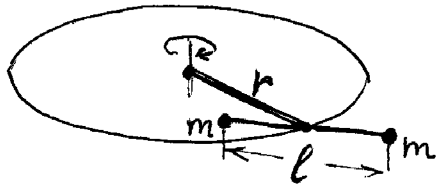

Рис. к задаче 2.

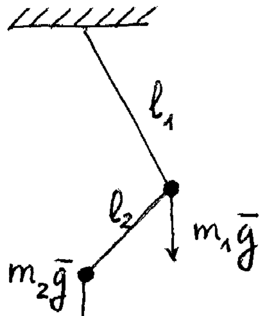

Рис. к задаче 3 в).

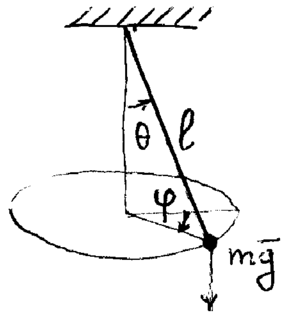

Рис. к задаче 4.

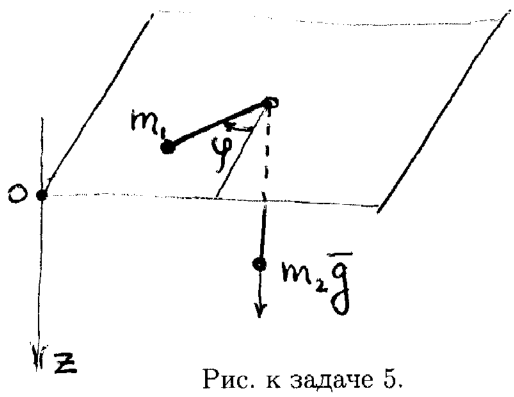

Рис. к задаче 5.