Листок 18. Вариационные задачи.

Задачи 1а,б), 2 составляют необходимый минимум в этом листке.

1. Путник должен перейти поле из начальной точки $A = (0, 0)$ в конечную $B = (1, 1)$ за фиксированное время $t = 1$. В то время, пока он находится в пути, в поле дует ветер, сила сопротивления которого пропорциональна скорости воздуха относительно путника, коэффициент пропорциональности — $k = 1$. Определите оптимальную траекторию путника, задача которого – минимизировать работу, затраченную на преодоление сопротивления ветра. Решите задачу в каждом из следующих случаев:

   a) скорость ветра постоянна $\vec{v} = (0, -1)$;

   b) ветер постепенно нарастает $\vec{v} = (0, -t)$;

   c) ветер меняет направление по закону $\vec{v} = (\sin\frac{\pi t}{2}, -\cos\frac{\pi t}{2})$.

2. Покажите, что в случае, если лагранжиан механической системы зависит не только от обобщенных координат q_i и скоростей $\dot{q}_i$, но и от обобщенных ускорений $\ddot{q}_i$, т.е., если $L = L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t)$, то уравнения Эйлера-Лагранжа, полученные из принципа наименьшего действия, будут иметь вид

   $$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

   Какие при этом надо наложить условия на вариации траекторий в начальный и конечный моменты времени?

3. Пользуясь вариационным принципом, докажите, что кратчайшим путем между двумя точками на двумерной сфере является дуга большого круга.

4. **Задача о брахистохроне.** Материальная точка, начальная скорость которой равна 0, скользит под действием своего веса по некоторой кривой, проходящей через две заданные точки, начальную и конечную. Задача состоит в том, чтобы найти такую кривую, называемую брахистохроной, движение по которой из начальной в конечную точки занимает наименьшее время.

   а) Пользуясь вариационным принципом, составьте дифференциальное уравнение брахистохроны.

   б*) Проинтегрировав это уравнение, найдите форму брахистохроны.