II Курс. Контрольная по лагранжевой механике

03.06.2011 Вариант 3

1. а) Силовое поле имеет вид $\overline{F} = f(\rho, z)\,\overline{e}_\rho + e^z g(\rho)\,\overline{e}_z$. Здесь $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ и z – циллиндрические координаты в 3-мерном пространстве, $\overline{e}_\rho$ и $\overline{e}_z$ – соответствующие векторы единичной длины (см. рисунок). Какие условия надо наложить на функции $f(\rho, z)$ и $g(\rho)$, чтобы поле $\overline{F}$ было потенциальным? Выпишите формулу для соответствующего потенциала.

   б)* В циллиндрических координатах компонента f_ϕ потенциального силового поля $\overline{F} = f_\rho\,\overline{e}_\rho + f_\phi \overline{e}_\phi + f_z\,\overline{e}_z$ имеет вид $f_\phi = \cos\phi\, g(\rho, z)$, где g – дифференцируемая функция. Определите возможный вид компонент f_ρ и f_z силового поля и соответствующего потенциала $U(\rho, \phi, z)$.

2. Два желоба, OA и OB, расположенные в вертикальной плоскости под углом α к вертикальной оси Oz, могут вращаться вокруг этой оси. Вдоль желобов скользят грузы A и B массой m_1 и m_2, соединенные невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через точку O и находящейся в натянутом состоянии. Пренебрегая трением и принимая за обобщенные координаты угол ϕ поворота плоскости AOB вокруг оси Oz и расстояние x от груза A до точки O,

   а) определите кинетическую и потенциальную энергии этой механической системы;

   б) составьте лагранжиан и запишите уравнения Эйлера-Лагранжа;

   в) выпишите законы сохранения, выполняющиеся в данной системе;

   г) определите виртуальные перемещения системы (указав как перемещается каждый груз);

   д) запишите уравнения движения системы, воспользовавшись принципом Даламбера.

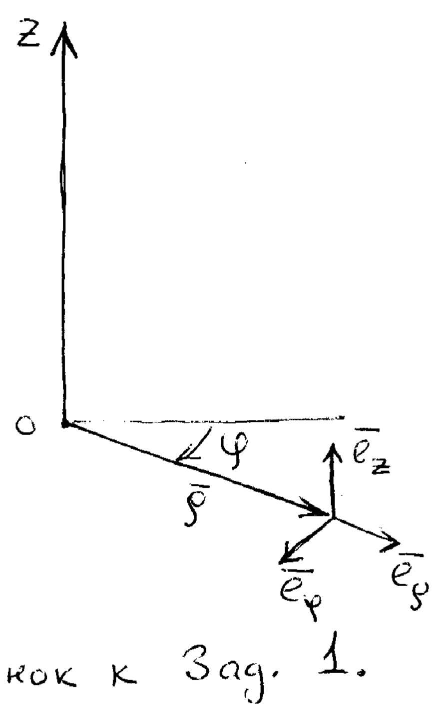

Рисунок к Зад. 1.

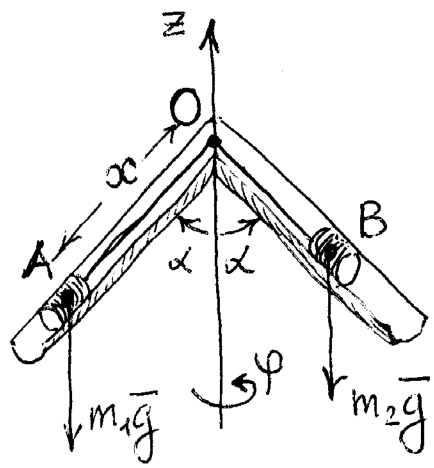

Рисунок к Зад. 2.

II Курс. Контрольная по лагранжевой механике

03.06.2011 Вариант 4

1. а) Силовое поле имеет вид $\overline{F} = e^{-\rho} g(z)\,\overline{e}_\rho + f(\rho, z)\,\overline{e}_z$. Здесь $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ и z – циллиндрические координаты в 3-мерном пространстве, $\overline{e}_\rho$ и $\overline{e}_z$ – соответствующие векторы единичной длины (см. рисунок). Какие условия надо наложить на функции $f(\rho, z)$ и $g(z)$, чтобы поле $\overline{F}$ было потенциальным? Выпишите формулу для соответствующего потенциала.

   б)* В циллиндрических координатах компонента f_ϕ потенциального силового поля $\overline{F} = f_\rho\,\overline{e}_\rho + f_\phi\,\overline{e}_\phi + f_z\,\overline{e}_z$ имеет вид $f_\phi = \cos\phi\, g(\rho, z)$, где g – дифференцируемая функция. Определите возможный вид компонент f_ρ и f_z силового поля и соответствующего потенциала $U(\rho, \phi, z)$.

2. Регулятор Уатта состоит из четырех одинаковых стержней OA, OB, AC и BC длиною l, двух шаров A и B, имеющих массу m каждый, и муфты C массы M, которая может скользить по неподвижной вертикальной оси Oz. Точка O неподвижна. Вся система может вращаться без трения вокруг оси Oz. Пренебрегая массой стержней и принимая за обобщенные координаты угол $\varphi = \angle$ BOC и угол ϑ поворота системы вокруг оси Oz,

   а) определите кинетическую и потенциальную энергии этой механической системы;

   б) составьте лагранжиан и запишите уравнения Эйлера-Лагранжа;

   в) выпишите законы сохранения, выполняющиеся в данной системе;

   г) определите виртуальные перемещения системы (указав как перемещается каждый груз);

   д) запишите уравнения движения системы, воспользовавшись принципом Даламбера.

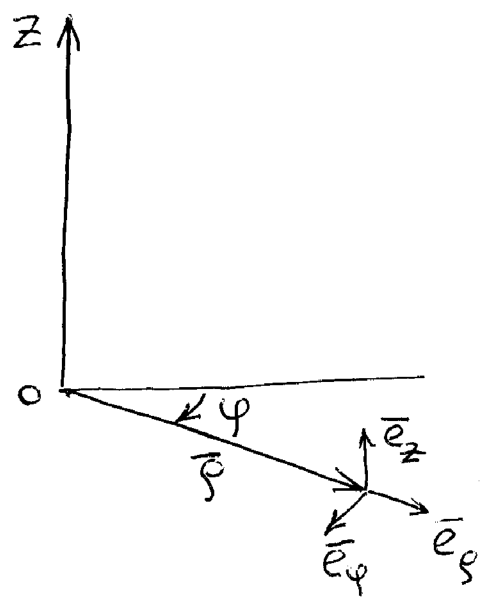

Рисунок к Зад. 1.

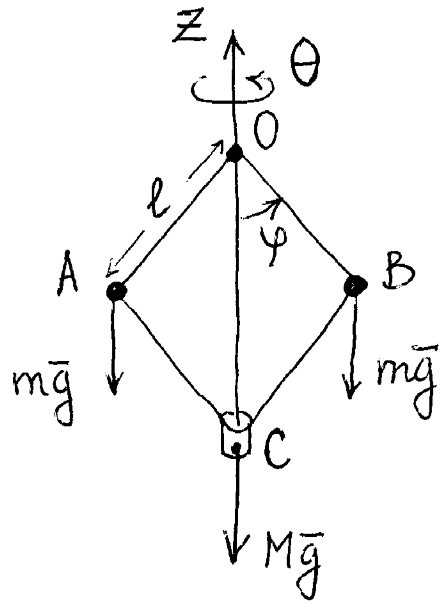

Рисунок к Зад. 2.