Лагранжева механика. Материалы к экзамену.

I. Вопросы.

1. Механические системы с одной степенью свободы (движение в одномерном потенциале). Фазовое пространство, фазовый портрет. Описание качественного поведения системы.

2. Система материальных точек: конфигурационное и фазовое пространства, центр масс. Вывод законов сохранения количества движения (импульса) и момента количества движения (момента импульса).

3. Работа силы. Консервативные силы. Вычисление потенциала консервативной силы. Закон сохранения энергии для системы материальных точек.

4. Центральные силы. Консервативность центральной силы. Вычисление потенциала центральной силы. Примеры центральных сил и их потенциалов.

5. Задача двух тел. Сведение к задаче о движении частицы в поле плоской центральной силы. Законы Кеплера.

6. Идеальные связи. Голономные связи. Реономные и склерономные связи. Конфигурационное пространство системы со связями. Виртуальные перемещения. Активные и реактивные силы. Вывод уравнений движения исключением сил реакции. Принцип Даламбера.

7. Уравнения Эйлера-Лагранжа. Вывод из принципа Даламбера. Обобщенные силы. Лагранжиан консервативной системы.

8. Примеры уравнений Эйлера-Лагранжа: уравнения движения частицы в полярных (циллиндрических) и сферических координатах. Метод множителей Лагранжа.

9. Принцип наименьшего действия. Вывод уравнений Эйлера-Лагранжа из принципа наименьшего действия.

10. Вариационные задачи в геометрии. Примеры решения вариационных задач (задачи о минимальном расстоянии и площади поверхности вращения).

11. Законы сохранения в уравнениях Эйлера-Лагранжа. Циклические координаты. Первая теорема Нетер.

II. Задачи.

Для решения на экзамене могут быть предложены задачи листков **14.1,3,4-6,9a, 15.1-3,5.6, 16.3-6, 17.1-7, 18.1-3,** а также следующие подобные им задачи:

1. Нарисуйте фазовые портреты движения одномерной частицы в поле потенциала

   а) $U(x) = e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}$; б) $U(x) = -\operatorname{ch}^{-2}(\alpha x)$; в) $U(x) = \operatorname{tg}^2(\alpha x)$.

   Найдите точку устойчивого равновесия (если она имеется). При каком значении энергии достигается устойчивое равновесие? Вычислите время, за которое частица с энергией E попадает из точки x_1 в точку x_2.

В задачах 3 - 5 требуется уметь: а) выводить уравнения движения, выписав полный набор уравнений Ньютона и исключив силы реакции; б) выводить уравнения движения, воспользовавшись принципом Даламбера; в) выводить уравнения движения, выписав уравнения Эйлера-Лагранжа; г) определять возможные первые интегралы движения (законы сохранения).

3. Две точки, массы которых m_1 и m_2, соединенные невесомым стержнем длины l, перемещаются по гладким сторонам неподвижного прямого угла, расположенного в вертикальной плоскости. Стороны угла образуют равные углы $\frac{\pi}{4}$ с горизонтом.

4. В гладкой прямолинейной трубе, наклоненной под углом α к горизонту и вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, находится бусинка массы m, свободно перемещающаяся вдоль трубы. Найти закон движения бусинки по трубе.

5. Через блок, массой которого можно пренебречь, перекинута нить; к одному концу этой нити подвешен груз массой m_1, к другому крепится еще один невесомый блок, через который перекинута вторая нить, несущая на концах грузы массами m_2 и m_3. Описать движение системы, предполагая, что трение отсутствует.

6. Три тела с массами m_1, m_2, m_3 свободно перемещаются в пространстве, взаимодействуя друг с другом с помощью сил гравитационного притяжения. Составьте лагранжиан системы и выпишите уравнения Эйлера-Лагранжа. Есть ли у этой системы интегралы движения?

7. Две точки равной массы m соединены жестким невесомым стержнем длины l. Середина этого стержня может двигаться вокруг точки O по окружности радиуса r в горизонтальной (либо вертикальной) плоскости. Сам стержень может вращаться вокруг своей середины в вертикальной (либо горизонтальной) плоскости, содержащей точку O. На точки действует сила тяжести $m\bar{g}$. Составьте лагранжиан системы и выпишите уравнения Эйлера-Лагранжа. Есть ли у этой системы интегралы движения?

8. Регулятор Уатта состоит из четырех одинаковых стержней OA, OB, AC и BC длиною l, двух шаров A и B, имеющих массу m каждый, и муфты C массы M, которая может скользить по неподвижной вертикальной оси Oz. Точка O неподвижна. Вся система может вращаться без трения вокруг оси Oz. Пренебрегая массой стержней и принимая за параметры угол $\varphi = \angle$ BOC и угол ϑ поворота системы вокруг оси Oz, составить Лагранжиан, выписать уравнения Эйлера-Лагранжа, и получить из них (или независимо) выражения для первых интегралов: энергии и момента импульса.

9. Однородный плоский диск (монета) радиуса r и массы m вращается с угловой скоростью ω вокруг прямой, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Найдите кинетическую энергию диска.

10. Та же задача для диска, вращающегося вокруг своего диаметра.

11. Составьте лагранжиан и напишите уравнения Эйлера-Лагранжа для массивного однородного стержня длины l и массы m, двигающегося в вертикальной плоскости, причем один его конец скользит по вертикальной стене, а второй опирается на гладкий пол.

12. Составьте лагранжиан и напишите уравнения Эйлера-Лагранжа для массивного однородного стержня длины l и массы m, первый конец которого перемещается вдоль горизонтальной прямой (гладкий пол), а второй свободно вращается в вертикальной плоскости. В качестве обобщенных координат выберите угол наклона стержня относительно горизонтали и положение его первого конца.

13. Составьте лагранжиан, напишите и решите уравнения Эйлера-Лагранжа для однородного обруча массы m и радиуса R, скатывающегося в вертикальной плоскости по наклонной прямой без проскальзывания (либо без трения) под действием силы тяжести.

14. Найдите геодезические для плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре на верхней полуплоскости $y > 0$ (метрика $ds^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$).

Литература.

1. Голдстейн Г., Классическая механика
2. Арнольд И.В., Математические методы классической механики
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Механика.
4. Эльсгольц Л.Э., Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.
5. Ольховский И.И., Павленко Ю.Г., Кузьменков Л.С., Задачи по теоретической механике для физиков.
6. Бухгольц Н.Н., Воронков И.М., Минаков А.П., Сборник задач по теоретической механике.
7. Баринова М.Ф., Голубева О.В., Задачи и упражнения по классической механике.

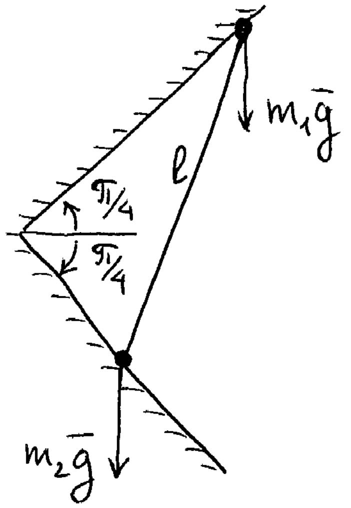

Рис. к задаче 3.

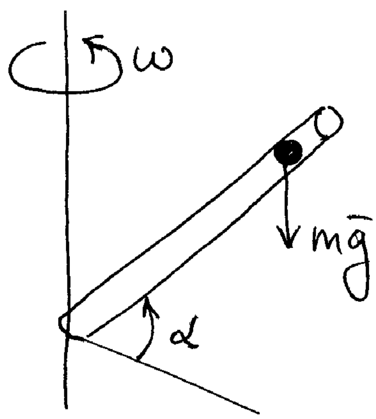

Рис. к задаче 4.

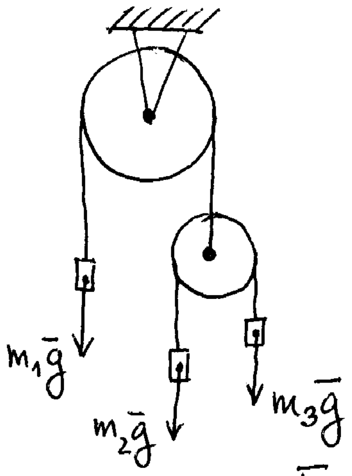

Рис. к задаче 5.

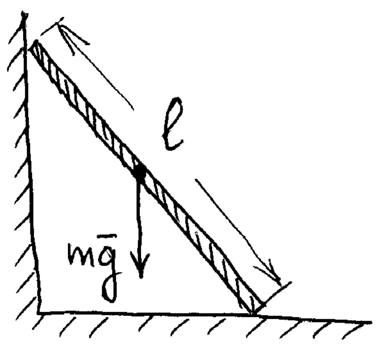

Рис. к задаче 11.

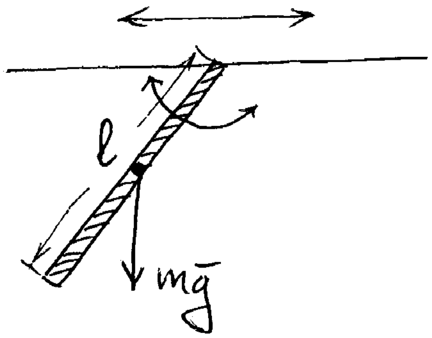

Рис. к задаче 12.

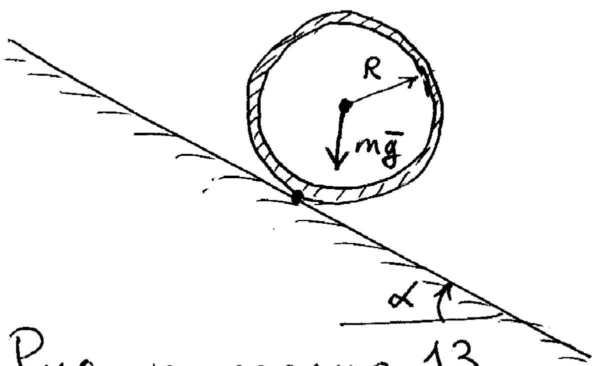

Рис. к задаче 13.