**Определение 2.1.** Пусть $M \subset \mathbb{R}$ — ограниченное сверху подмножество. Его *точной верхней гранью* называется число $\sup M = \min\{c \in \mathbb{R} : x \leqslant c \ \forall x \in M\}$. Эквивалентно, число $m \in \mathbb{R}$ называется точной верхней гранью множества $M$, если $\forall x \in M \ x \leqslant m$ и $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in M : x > m - \varepsilon$.

**2.1.** Дайте определение *точной нижней грани* $\inf M$ ограниченного снизу подмножества $M \subset \mathbb{R}$. Установите взаимосвязь понятий точной нижней и точной верхней грани.

**2.2.** Из существования предела у каждой последовательности Коши в $\mathbb{R}$ выведите последовательно следующие утверждения:

1) Любая монотонная и ограниченная последовательность в $\mathbb{R}$ имеет предел.
2) Любое ограниченное сверху подмножество $\mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань.
3) Любое ограниченное снизу подмножество $\mathbb{R}$ имеет точную нижнюю грань.
4) Для любых подмножеств $A, B \subset \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $a \leqslant b$ для всех $a \in A, \ b \in B$, найдется такое $c \in \mathbb{R}$, что $a \leqslant c \leqslant b$ для всех $a \in A, \ b \in B$.
5) Если $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ — последовательность вложенных отрезков, то $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} I_k \neq \varnothing$.

**2.3.** Выведите существование предела у любой последовательности Коши в $\mathbb{R}$ из следующего утверждения (формально более слабого, чем утверждение 5 задачи 2.2):

6) Если $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ — последовательность вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю, то $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} I_k \neq \varnothing$.

Таким образом, свойства 1)–6) множества $\mathbb{R}$ эквивалентны друг другу и эквивалентны существованию предела у любой последовательности Коши в $\mathbb{R}$. Каждое из этих свойств принято называть *свойством полноты* $\mathbb{R}$.

**2.4.** Докажите, что для $|q| < 1$ справедлива формула $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1}{1-q}$.

**2.5** (*число e*)**.** Докажите, что последовательность $e_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ монотонна и ограничена (и, следовательно, имеет предел). Этот предел называется *числом e*.

**Замечание 2.1.** При решении задач 2.5, 2.7 можно пользоваться формулой *бинома Ньютона*: для любых $a, b \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

где

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

— число сочетаний из $n$ по $k$ (биномиальный коэффициент).

**2.6** (*теорема о двух ~~милиционерах~~ полицейских*)**.** Пусть $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ для всех $n$, и пусть существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$. Докажите, что тогда существует $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, и что он равен $a$.

**2.7.** Докажите, что **1)** $e = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$; **2)** $e - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} < \dfrac{1}{n!n}$.

**2.8.** Докажите, что число $e$ иррационально.

**2.9.** *Числами Фибоначчи* называется последовательность чисел $\{f_n\}$, заданная рекуррентно: $f_1 = f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ при $n > 2$. Докажите, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_{n+1}}{f_n}$, и найдите его.

**2.10.** Докажите, что следующие последовательности имеют пределы, и найдите их:

**1)** $x_n = \underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots\sqrt{2}}}}}_{n}$; **2)** $x_n = \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots+\sqrt{1}}}}}_{n}$; **3)** $x_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, где числа $p_n, q_n$ определены рекуррентно: $p_0 = 0,\ q_0 = 1,\ p_{n+1} = p_n + q_n,\ q_{n+1} = 2p_n + q_n$.

**2.11.** Существует ли предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$?

**2.12.** Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$ — функция, $c \in I$. Известно, что $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \ell$. Верно ли, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :$ при $|x - c| < \delta,\ x \in I$ выполнено $|f(x) - \ell| < \varepsilon$?

**2.13.** Пусть $f$ и $g$ — функции на прямой. Известно, что $\lim\limits_{y\to a} f(y) = b$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$. Верно ли, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = b$?

**Определение 2.2.** Говорят, что подмножество $M \subset \mathbb{R}$ *компактно*, если из любого его покрытия интервалами можно выделить конечное подпокрытие (т.е. если для любого семейства интервалов $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, такого, что $\bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha \supset M$, найдутся такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$, что $U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n} \supset M$).

**2.14. 1)** Из теоремы Больцано–Вейерштрасса выведите, что любой отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ компактен.
**2)** Из компактности отрезка выведите теорему Больцано–Вейерштрасса.