1. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА.

Задача 1 (примеры топологических пространств)**.** Докажите, что система открытых множеств в пространстве X действительно является топологией: а) (стандартная топология действительной прямой) $X = \mathbb{R}$, множество $U \subset \mathbb{R}$ открыто, если $\forall a \in U \exists \varepsilon > 0 : (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset U$; б) (топология Зарисского) $X = \mathbb{R}$, $U \subset X$ открыто, если $X \setminus U$ конечно (в т.ч. пусто); в) (связное двоеточие) $X = \{a, b\}$, открытыми множествами являются $\varnothing$, $\{a\}$ и X; г) (окружность) $X = S^1$; множество $U \subset S^1$ открыто, если $\forall a \in U$ существует открытая дуга с центром в a, целиком лежащая в U.

Задача 2*. Придумайте обобщения примеров 1а–1г.

Задача 3 (операции над топологическими пространствами)**.** Докажите, что следующие операции над топологическими пространствами действительно порождают топологию. а) (переход к подмножеству) Пусть X — топологическое пространство, $Y \subset X$. Тогда топология в Y определяется так: множество $U \subset Y$ открыто, если существует открытое множество $V \subset X$ такое, что $U = V \cap Y$. б) (декартово произведение) Пусть X_1, X_2 — топологические пространства. Топология в множестве $X_1 \times X_2$ определяется так: множество $U \subset X_1 \times X_2$ открыто, если для каждой точки $(a_1, a_2) \in X_1 \times X_2$ существуют открытые множества $U_1 \subset X_1$, $U_2 \subset X_2$ такие, что $a_1 \in U_1$, $a_2 \in U_2$ и $U_1 \times U_2 \subset U$. в) (склейка или факторизация) Пусть X — топологическое пространство, разбитое на непустые непересекающиеся подмножества: $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ (A — произвольное множество индексов), при этом $X_\alpha \cap X_\beta \neq \varnothing \Leftrightarrow \alpha = \beta$. Тогда на множестве $Y = \{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ топология вводится так: *множество* $U = \{X_\alpha \mid \alpha \in B \subset A\} \subset Y$ является открытым, если *объединение* $\bigcup_{\alpha \in B} X_\alpha \subset X$ открыто. Неформально говоря, Y получено из X склеиванием (отождествлением) всех точек x, принадлежащих каждому множеству X_α, а множество $U \subset Y$ открыто, если оно получено склеиванием точек какого-либо открытого множества $V \subset X$, полученного объединением некоторых множеств X_α.

Задача 4 (упражнение к задаче 3б)**.** Введем в $\mathbb{R}^2$ топологию так: множество $U \subset \mathbb{R}^2$ называется открытым, если $\forall x \in U \exists \varepsilon > 0 \, \{y \mid |y - x| < \varepsilon\} \subset U$. а) Докажите, что это топология. б) Докажите, что эта топология совпадает с топологией прямого произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в смысле задачи 3б.

Задача 5 (упражнение к задаче 3в)**.** Пространство X — отрезок $[0, 1]$, у которого склеены точки 0 и 1. Докажите, что X гомеоморфно окружности S^1. Топология отрезка определяется, как в задачах 1а и 3а ($[0, 1] \subset \mathbb{R}$), топология X — как в задаче 3в ($[0, 1]$ разбивается на точки $x \in (0, 1)$ и двухточечное множество $\{0, 1\}$). Топология окружности определяется как в задаче 3а ($S^1 \subset \mathbb{R}^2$); топология плоскости $\mathbb{R}^2$ — как в задаче 3б.

Задача 6 (проективная прямая)**.** Проективной прямой называется топологическое пространство, полученное из $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ склейками: $(x, y) \sim (tx, ty)$ для всех $(x, y) \neq (0, 0)$ и всех $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. а) Зафиксируем какую-нибудь точку $a_0 \in \mathbb{R}P^1$. Постройте гомеоморфизм $f : \mathbb{R}P^1 \setminus \{a_0\} \to \mathbb{R}$. б) Постройте гомеоморфизм $g : \mathbb{R}P^1 \to S^1$.

Задача 7*. Дайте определение комплексной проективной прямой, сформулируйте и докажите аналоги утверждений задачи 6.

Задача 8 (последовательности)**.** Рассмотрим множество $\mathbb{N}$ целых положительных чисел с дискретной топологией и добавим к нему точку ∞. Множество $U \subset \overline{\mathbb{N}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ называется открытым, если либо $\infty \notin U$, либо $\infty \in U$ и существует N такое, что $\{N, N+1, N+2, \dots\} \cup \{\infty\} \subset U$. а) Докажите, что таким образом в $\overline{\mathbb{N}}$ определена топология. б) Существует ли в $\mathbb{R}$ подмножество, гомеоморфное $\overline{\mathbb{N}}$? в) Что такое непрерывное отображение $\overline{\mathbb{N}}$ в $\mathbb{R}$? а непрерывное отображение $\mathbb{R}$ в $\overline{\mathbb{N}}$?

Задача 9 (предупреждающий пример)**.** Приведите пример топологических пространств X, Y и обратимого непрерывного отображения $f : X \to Y$, не являющегося гомеоморфизмом.

Задача 10 (примеры гомеоморфизмов)**.** Постройте гомеоморфизм а) окружности и окружности, у которой попарно отождествлены противоположные точки; б) пространства прямых на плоскости, проходящих через начало координат (уточните топологию в этом пространстве!) и окружности; в) пространства пар точек на прямой, в котором пары (x, y) и (y, x) для всех $x, y \in \mathbb{R}$ отождествляются (возможно $x = y$!), и полуплоскости с границей; г) двумерной сферы и плоскости, к которой добавлена новая точка ∞, база окрестностей которой состоит из всех множеств $\Omega_R \stackrel{\text{def}}{=} \{\infty\} \cup \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > R\}$, $R > 0$; д) проективной плоскости — пространства $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, в котором отождествлены точки $(x, y, z) \sim (tx, ty, tz)$ при всех $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ и всех

$t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — и круга $\{(p,q) \mid p^2+q^2 \le 1\}$, в котором отождествлены диаметрально противоположные точки границы: $(p,q) \sim (-p,-q)$ при всех p,q таких, что $p^2+q^2=1$, а также квадрата $[-1,1]\times[-1,1]$, в котором противоположные стороны склеены "с перекруткой": $(-1,x) \sim (1,-x)$, $(x,-1) \sim (-x,1)$ для всех $-1 \le x \le 1$; е) пространства всех прямых на плоскости (уточните топологию!) и ленты Мебиуса — квадрата $[-1,1]\times(-1,1)$, в котором отождествлены точки $(1,x)$ и $(-1,-x)$ для всех $-1<x<1$.

Задача 11 (пример, когда гомеоморфизма нет)**.** Докажите, что окружность S^1 и отрезок $[0,1]$ не гомеоморфны.

Указание. Доказательств множество; можно, например, воспользоваться теоремой о промежуточном значении для функций на отрезке.

Определения: n-мерной сферой называется топологическое пространство, гомеоморфное $\{(x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2+x_1^2+\dots+x_n^2=1\}$. n-мерным вещественным проективным пространством $\mathbb{R}P^n$ называется множество прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат или, что то же самое, $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$, в котором произведены склейки $(x_0,\dots,x_n) \sim (tx_0,\dots,tx_n)$ для всех $(x_0,\dots,x_n) \ne 0$ и всех $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Аналогично определяются комплексные проективные пространства.

Задача 12* (еще гомеоморфизмы)**.** а) Докажите, что S^n без одной точки гомеоморфно $\mathbb{R}^n$. б) Докажите, что надстройка над S^n, т.е. произведение $S^n\times[0,1]$, в котором склеены все точки $(x,0)$ и все точки $(x,1)$ при $x \in S^n$, гомеоморфна S^{n+1}. в) Докажите, что множество пар (z,w) комплексных чисел, удовлетворяющих равенству $|z|^2+|w|^2=1$, гомеоморфно S^3. г) Докажите, что подмножество $X \subset S^3$, состоящее из пар (z,w), для которых $|z| \le |w|$, гомеоморфно произведению окружности на двумерный круг (полноторию), а подмножество, состоящее из пар, где $|z|=|w|$, гомеоморфно двумерному тору $S^1\times S^1$. д) Пусть $K \subset \mathbb{R}^3$ — стандартное полноторие (бублик вместе с внутренностью). Докажите, что $\mathbb{R}^3\setminus K$ гомеоморфно полноторию без точки. е) Докажите, что множество точек $[x_0:x_1:x_2] \in \mathbb{C}P^2$, однородные координаты которых удовлетворяют уравнению $x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$, гомеоморфно проективной прямой $\mathbb{C}P^1$, т.е. (согласно задаче 7*) сфере S^2. ж) Докажите, что множество точек $[x_0:x_1:x_2:x_3] \in \mathbb{C}P^3$, для которых $x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$, гомеоморфно произведению $\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^1$. з) Докажите, что множество неупорядоченных наборов из n комплексных чисел гомеоморфно $\mathbb{C}^n$. и) Докажите, что множество неупорядоченных наборов из n точек на $\mathbb{C}P^1$ гомеоморфно проективному пространству $\mathbb{C}P^n$.

Указание (к задаче 12з)**.** При $n=2$ (т.е. для неупорядоченной пары $\langle x_1,x_2\rangle$ комплексных чисел) рассмотрите многочлен $P(t)=(t-x_1)(t-x_2)$.