2. ОТОБРАЖЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ В ОКРУЖНОСТЬ.

В дальнейшем S^1 — окружность, понимаемая как $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$, и $E : \mathbb{R} \to S^1$ — отображение, заданное формулами $E(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ или $E(t) = e^{2\pi i t}$.

Задача 1. Докажите, что E является накрытием.

Задача 2. Пусть $f : S^1 \to S^1$ — непрерывное отображение. а) Докажите, что существует непрерывное отображение $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (называемое поднятием f) такое, что $f \circ E = E \circ F$. б) Пусть $F_1, F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — два поднятия одного и того же отображения f. Докажите, что $F_1(t) - F_2(t) = const.$, причем константа — целое число. в) Пусть F — поднятие отображения f. Докажите, что $F(t+1) - F(t) = const.$, причем константа — целое число и не зависит от выбора поднятия. Константа обозначается $\deg f$ и называется степенью отображения f. г) Пусть $f_t : S^1 \to S^1$ — гомотопия, т.е. семейство непрерывных отображений, непрерывно зависящее от $t \in [0,1]$. Докажите, что существует семейство непрерывных отображений $F_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, нерерывно зависящее от t и такое, что F_t — поднятие f_t для всех t. д) Докажите, что если отображения $f_0 : S^1 \to S^1$ и $f_1 : S^1 \to S^1$ гомотопны, то $\deg f_0 = \deg f_1$. е) Докажите, что если $\deg f_0 = \deg f_1$, то отображения f_0 и f_1 гомотопны.

Указание (к пунктам 2а и 2д)**.** Воспользуйтесь теоремой о поднятии пути и теоремой о накрывающей гомотопии соответственно. Теорема о поднятии пути: для всякого пути — непрерывного отображения $\gamma : [0,1] \to S^1$ такого, что $\gamma(0) = 1$, существует и единственно его поднятие — непрерывное отображение $\Gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ такое, что $E \circ \Gamma = \gamma$ и $\Gamma(0) = 0$. Теорема о накрывающей гомотопии: для всякой гомотопии путей — то есть непрерывного отображения $\psi : [0,1]^2 \to S^1$ такого, что $\psi(0,s) = 1$ для всех s, существует и единственно накрывающая гомотопия — непрерывное отображение $\Psi : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ такое, что $E \circ \Psi = \psi$ и $\Psi(0,s) = 0$ для всех s.

Указание (к пункту 2е)**.** Рассмотрите поднятия F_0 и F_1 отображений f_0 и f_1 такие, что $F_0(0) = F_1(0)$, и придумайте гомотопию между ними.

Задача 3. Пусть $\mathrm{id} : S^1 \to S^1$ — тождественное отображение, а $\mathbf{1} : S^1 \to S^1$ переводит все в точку $1 \in S^1$. Вычислите степени этих отображений.

Пусть $\gamma : [0,1] \to S^1$ — петля, т.е. непрерывное отображение, для которого $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$. Определим отображение $\Gamma : S^1 \to S^1$ формулой $\Gamma(z) = \gamma(\log z / 2\pi i)$, где $w = \log z$ — число на отрезке $[0, 2\pi i]$ мнимой оси такое, что $e^w = z$.

Задача 4. а) Докажите, что Γ корректно определено и непрерывно. б) Пусть γ_1, γ_2 — две петли, $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$, а Γ_1, Γ_2, Γ — соответствующие отображения. Докажите, что $\deg \Gamma = \deg \Gamma_1 + \deg \Gamma_2$. в) Докажите, что петли γ_1 и γ_2 гомотопны тогда и только тогда, когда $\deg \Gamma_1 = \deg \Gamma_2$.

Иными словами, соответствие $\gamma \mapsto \deg \Gamma$ определяет изоморфизм групп $\pi_1(S^1)$ и $\mathbb{Z}$.

Задача 5 (теорема Брауэра в размерности 1)**.** а) Пусть $f : [0,1] \to [0,1]$ — непрерывное отображение. Докажите, что существует точка $x \in [0,1]$ такая, что $f(x) = x$. б) Верна ли аналогичная теорема с заменой отрезка $[0,1]$ на интервал $(0,1)$? а на прямую $\mathbb{R}$?

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — единичный замкнутый круг с центром в начале координат, $f : D \to D$ — непрерывное отображение.

Теорема (теорема Брауэра в размерности 2)**.** *Существует $x \in D$ такое, что $f(x) = x$.*

Докажем теорему от противного: пусть $f : D \to D$ — отображение, для которого она неверна. Определим тогда непрерывное отображение $g : D \to S^1$ формулой $g(x) = \frac{f(x)-x}{|f(x)-x|}$, а гомотопию $u_s : S^1 \to S^1$, $0 \le s \le 1$, — формулой $u_s(t) = g(s\cos 2\pi t, s \sin 2\pi t)$.

Задача 6. а) Докажите, что u_s — действительно гомотопия и, следовательно, степень $\deg u_s$ не зависит от s. б) Докажите, что $\deg(u_0) = 0$. в) Докажите, что u_1 гомотопна тождественному отображению $\mathrm{id} : S^1 \to S^1$. г) Выведите из результатов пунктов 6а–6в теорему Брауэра в размерности 2.

Теорема (основная теорема алгебры)**.** *Всякий многочлен вида $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ с комплексными коэффициентами $a_{n-1}, \dots, a_0$ имеет по крайней мере один корень.*

Докажем теорему от противного: пусть многочлен P не имеет корней. Определим гомотопию $u_s[P]$ равенством $u_s[P](z) = P(sz)/\,|P(sz)|$, где $z \in S^1$ и $s \in [0, \infty)$. Это, очевидно, гомотопия, так что $\deg u_s[P]$ не зависит от s.

Задача 7. а) Докажите, что $\deg(u_0) = 0$. б) Докажите, что при достаточно большом s отображение $u_s[P]$ гомотопно отображению $u_s[P_0]$, где $P_0(z) = z^n$. в) Докажите, что $\deg u_s[P] = n$ при достаточно большом s. Выведите отсюда основную теорему алгебры.

Указание (к пункту 7б)**.** Рассмотрите гомотопию $u_s[(1-t)P + tP_0]$, $0 \le t \le 1$. При $|z| = R \gg 1$ имеем $|z^n| \gg |a_k z^k|$ для всех $0 \le k \le n-1$, откуда вытекает, что при $s \gg 0$ указанная гомотопия определена.