Оглавление

0 Предварительные сведения **3**
0.1 Комплексные проективные пространства 3
0.2 Топология проективного пространства 5
0.3 Двумерные поверхности 5
0.4 Склейка двумерных поверхностей из многоугольников 6
0.5 Накрытия и разветвленные накрытия 8
0.6 Формула Римана–Гурвица 11

Глава 0

Предварительные сведения

Основным объектом нашего курса будут комплексные алгебраические кривые, или, что то же самое, римановы поверхности. Такие кривые обладают сложными индивидуальными характеристиками и, как правило, две различные кривые, даже если они одного рода, мало похожи друг на друга. Однако если мы рассматриваем кривые не поодиночке, а в *семействах*, то такие семейства уже устроены относительно просто и обладают многими замечательными свойствами, которые находят разнообразные применения в математике и теоретической физике. Переход от отдельных кривых к семействам и есть предмет нашего курса.

В нашем обыденном представлении кривые — это в первую очередь вещественные кривые на вещественной плоскости. Но оказывается, что для алгебраических кривых такое представление обладает многими недостатками. Главный недостаток связан с тем, что в алгебре удобнее иметь дело с алгебраически замкнутыми полями. Например, над полем $\mathbb{C}$ любой многочлен степени n от одной переменной имеет ровно n корней с учетом их кратностей, а над полем $\mathbb{R}$ это неверно — у многочлена степени n может быть меньше, чем n корней. Для кривых это различие проявляется в том, что две плоские комплексные кривые степени n и m пересекаются в mn точках, а для вещественных кривых это, вообще говоря, неверно — число точек пересечения может быть меньше mn.

Кроме того, кривые (и, в частности, прямые) на аффинной плоскости могут пересекаться в бесконечно удаленных точках, что тоже создает препятствия для их изучения. В связи с этим кривые естественно рассматривать в комплексных проективных пространствах, определение которых мы сейчас обсудим.

0.1 Комплексные проективные пространства

Точками *n-мерного комплексного проективного пространства* $\mathbb{CP}^n$ являются комплексные прямые в $(n+1)$-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$,

Рис. 1: Две аффинные карты и соответствующие им бесконечно удаленные точки на проективной прямой

проходящие через начало координат. Такая прямая однозначно определяется отличной от начала координат точкой $(z_0, z_1, \dots, z_n)$, через которую она проходит. В свою очередь, эта точка определена однозначно с точностью до умножения на ненулевое комплексное число λ: точка $(\lambda z_0, \lambda z_1, \dots, \lambda z_n)$ задает ту же самую прямую. Другими словами, $\mathbb{CP}^n$ — это факторпространство $(n+1)$-мерного комплексного пространства с выколотым началом координат по действию мультипликативной группы ненулевых комплексных чисел умножением векторов на константы. Точку проективного пространства будем записывать в виде набора $(z_0 : z_1 : \dots : z_n)$, не все элементы которого нулевые, понимая под этим обозначением класс эквивалентности наборов координат относительно описанного выше отношения эквивалентности. Набор $(z_0 : z_1 : \dots : z_n)$ называют *однородными координатами.*

Полагая $z_i = 1$ поочередно для $i = 0, 1, \dots, n$, мы получаем $n+1$ *карту* в проективном пространстве. Такая карта покрывает все пространство, за исключением гиперплоскости $z_i = 0$, и является n-мерным комплексным пространством $\mathbb{C}^n$. Все координаты, кроме i-й, в совокупности образуют набор *аффинных координат* в соответствующей карте.

При $n = 1$ мы имеем дело с одномерным проективным пространством $\mathbb{CP}^1$. Это один из первых — наряду с комплексной прямой $\mathbb{C}$ — примеров комплексных кривых. Эту кривую называют также *рациональной кривой*, или *сферой Римана*.

Положив $z_0 = 1$ или $z_1 = 1$ в $\mathbb{CP}^1$, мы получаем две аффинные карты в $\mathbb{CP}^1$, каждая из которых представляет собой комплексную прямую $\mathbb{C}$. На первой из этих карт есть координата z_1, на второй — координата z_0. В каждую из карт не попадает ровно одна точка, которую мы будем называть *бесконечно удаленной* точкой для этой аффинной карты; эта точка обозначается $z_1 = \infty$ в первой карте и соответственно $z_0 = \infty$ во второй, см. рис. 1.

Выбор аффинных координат на проективной плоскости (и, более общим образом, в проективном пространстве произвольной размерности n) неоднозначен. От одной системы координат к другой можно перейти *проективным преобразованием* — линейным преобразованием $Z = AZ'$, рассматриваемым с точностью до умножения на константу (здесь Z, Z' — векторы-столбцы,

A — невырожденная квадратная матрица порядка $n+1$). Проективное преобразование не меняет геометрических свойств подмножеств проективного пространства, в частности, кривых в нем. Поэтому мы часто будем выбирать наиболее удобные координаты — те, в которых интересующие нас подмножества задаются наиболее простыми формулами.

0.2 Топология проективного пространства

Комплексная проективная прямая не случайно называется сферой Римана — с топологической точки зрения она является двумерной сферой. Комплексные проективные пространства большей размерности также имеют простую топологию. Они компактны, а их гомологии можно описать индуктивно: комплексное проективное пространство размерности $n+1$ является объединением аффинной карты $\mathbb{C}^{n+1}$ и проективного пространства на единицу меньшей размерности. Поэтому $(n+1)$-мерное проективное пространство представляет собой результат приклеивания $2(n+1)$-мерной клетки к $2n$-мерному комплексу. Это свойство позволяет вычислить гомологии проективных пространств с комплексными коэффициентами:

$$H_{2i}(\mathbb{CP}^n) = \mathbb{C} \text{ для } i = 0, 1, \ldots, n,$$

а все остальные группы гомологий равны 0.

Кольцо комплексных когомологий проективного пространства $\mathbb{CP}^n$ порождено элементом h степени 2. Оно представляет собой кольцо многочленов от одной переменной, срезанных по степени $n+1$, $H^*(\mathbb{CP}^n) = \mathbb{C}[h]/(h^{n+1} = 0)$. Элемент h^i в этом кольце является двойственным по Пуанкаре проективному подпространству $\mathbb{CP}^{n-i}$, представляющему образующую в гомологиях $H_{2(n-i)}(\mathbb{CP}^n)$, $i = 0, \ldots, n$. В частности, сам элемент h двойственен подпространству $\mathbb{CP}^{n-1}$ — гиперплоскому сечению.

0.3 Двумерные поверхности

Двумерная поверхность — это компактное двумерное многообразие (возможно, с краем). Если край пуст, то говорят, что поверхность *замкнута*.

Для каждой точки двумерной поверхности можно определить два различных направления вращения вокруг этой точки. Если во всех точках двумерной поверхности задано направление вращения, причем в близких точках направления вращения согласованы, то говорят, что на поверхности *задана ориентация.* Поверхность, на которой можно задать ориентацию, называют *ориентируемой.* Нетрудно убедиться в том, что плоскость $\mathbb{R}^2$ ориентируема и что выкалывание нескольких точек не влияет на ориентируемость. Следовательно, сфера S^2 ориентируема.

Нас будут интересовать только ориентируемые поверхности, потому что с топологической точки зрения гладкая комплексная кривая — это замкнутая ориентируемая поверхность.

Рис. 2: Сферы с $0, 1, 2, 3$ ручками

Связной суммой двух поверхностей M и N называют поверхность $M\#N$, которая получается в результате вырезания из M и N малых открытых дисков D_1 и D_2 и приклейки $M \setminus D_1$ к $N \setminus D_2$ по гомеоморфизму $h\colon \partial D_1 \to \partial D_2$. Если малый открытый диск D вырезается из *тора* $S^1 \times S^1$, то оставшееся множество называют *ручкой*.

Связную сумму g торов называют *сферой с g ручками* (сфера с нулем ручек это просто сфера S^2). Любая замкнутая ориентируемая двумерная поверхность гомеоморфна сфере с g ручками (для некоторого g), причем сферы с разным числом ручек не гомеоморфны. Сферы с g ручками для $g = 0, 1, 2, 3$ изображены на рис. 2. Упомянем также, что любая замкнутая неориентируемая поверхность гомеоморфна связной сумме нескольких экземпляров вещественной проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$, причем связные суммы разного числа проективных плоскостей не гомеоморфны. По поводу доказательства теоремы о классификации двумерных поверхностей см., например, [?].

0.4 Склейка двумерных поверхностей из многоугольников

Любую замкнутую двумерную поверхность можно *триангулировать*, т.е. разрезать на треугольники так, что любые два треугольника либо не имеют общих точек, либо имеют одну общую вершину, либо имеют одну общую сторону (общей не может быть часть стороны). Пусть V — число вершин, E — число ребер (сторон) и F — число граней данной триангуляции. Число $V - E + F$, называемое *эйлеровой характеристикой* данной поверхности M, не зависит от выбора триангуляции. Оно обозначается через $\chi(M)$. Эйлерова характеристика сферы с g ручками равна $2-2g$, а эйлерова характеристика связной суммы g вещественных проективных плоскостей равна $1 - g$.

Более общим образом, любую замкнутую двумерную поверхность можно склеить из многоугольников. При такой склейке каждая сторона многоугольника склеивается ровно с одной из сторон этого же или другого многоугольника, так что вершины склеиваются с вершинами. Склеенные

Рис. 3: Склейка поверхности из многоугольников

Рис. 4: Стандартная склейка ориентируемой поверхности рода g из $4g$-угольника

попарно стороны многоугольников образуют граф на склеенной поверхности; вершинами этого графа служат склеенные вершины многоугольников, а гранями — внутренности многоугольников. Формула Эйлера, выражающая эйлерову характеристику построенной таким образом поверхности через число вершин, ребер и граней графа, остается справедливой и для такой склейки.

Для того, чтобы получить ориентируемую (и ориентированную) поверхность, нужно ориентировать каждый из склеиваемых многоугольников и при склейке сторон соблюдать согласованность ориентации. Поскольку для каждой пары сторон есть лишь один способ склеить их так, чтобы ориентации были согласованы, каждая склейка однозначно определяется разбиением всех сторон всех многоугольников на непересекающиеся пары, см. рис. 3.

Зачастую бывает удобно реализовывать поверхность данного рода склейкой из одного многоугольника. Минимальное число сторон у многоугольника, склейкой которого можно получить поверхность рода g, равно $4g$. При $g > 1$ ориентируемую поверхность рода g из $4g$-угольника можно склеить несколькими способами. В качестве стандартной обычно берется склейка по схеме $ababcdcd\dots$ (первая сторона склеивается с третьей, 2-я с 4-ой, 5-я с 7-ой и т.д.), см. рис. 4.

При стандартной склейке след многоугольника образует граф с одной

Рис. 5: Пример склейки поверхности из многоугольников

вершиной, $2g$ ребрами и одной гранью на получаемой поверхности. Поэтому эйлерова характеристика этой поверхности равна

$$V - E + F = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g,$$

т.е. ее род действительно равен g.

Упражнение 0.4.1. Пользуясь формулой Эйлера, найдите род ориентируемой поверхности, склеенной из одного многоугольника по следующей схеме: а) *abcabc*; б) *abcdabcd*; в) *abcdabdc*.

Упражнение 0.4.2. Пользуясь формулой Эйлера, найдите род поверхности, получаемой в результате склейки многоугольников с рис. 5 по указанной там схеме.

0.5 Накрытия и разветвленные накрытия

Непрерывное отображение $p : M \to N$ двумерных поверхностей называют ***накрытием***, если у каждой точки y поверхности N есть окрестность $U = U(y) \subset N$, прообраз которой при отображении p является несвязным объединением некоторого набора копий окрестности U, причем ограничение отображения p на каждую из копий есть гомеоморфизм.

Типичным примером накрытия служит отображение $z \mapsto z^n$ проколотого единичного диска $|z| < 1, z \neq 0$ на комплексной прямой в себя.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что накрываемая поверхность N связна. В этом случае либо каждая точка поверхности N имеет бесконечно много прообразов, либо множество прообразов каждой точки конечно и число прообразов любых двух точек одинаково. Это общее число прообразов называется *степенью*, или *количеством листов*, накрытия. Если накрываемая поверхность ориентируема и на ней выбрана одна из двух ориентаций, то накрывающая поверхность также ориентируема, причем на ней определена ориентация, *индуцированная* с накрываемой поверхности.

Упражнение 0.5.1. Приведите пример накрытия $p : M \to N$, где поверхность M ориентируема, а поверхность N неориентируема.

Теорема 0.5.2. *Пусть $p : M \to N$ — n-листное накрытие, причем M и N — связные компактные двумерные поверхности. Тогда $\chi(M) = n\chi(N)$.*

Доказательство. Рассмотрим достаточно мелкую триангуляцию поверхности N. Тогда прообраз каждого треугольника этой триангуляции состоит из n попарно непересекающихся треугольников, причем в совокупности они образуют триангуляцию поверхности M. В полученной триангуляции поверхности M каждому треугольнику триангуляции поверхности N соответствует ровно n треугольников, каждому ребру — ровно n ребер, а каждой вершине — ровно n вершин. Следовательно, $\chi(M) = n\chi(N)$. □

Упражнение 0.5.3. Докажите, что сфера с g ручками накрывает сферу с h ручками тогда и только тогда, когда $g - 1$ делится на $h - 1$ (здесь $g, h \geq 2$).

Накрытия тесно связаны с фундаментальными группами отображаемых поверхностей. Пусть $y_0 \in N$ — произвольная точка; мы будем считать ее базисной точкой фундаментальной группы $\pi_1(N, y_0)$. Рассмотрим произвольное накрытие $p : M \to N$ связной поверхностью и выберем какой-нибудь прообраз $x_0 \in p^{-1}(y_0)$ точки y_0.

Пусть $\gamma : [0, 1] \to N$ — произвольная непрерывная петля с началом и концом в точке y_0, $\gamma(0) = \gamma(1) = y_0$. Возьмем какой-нибудь прообраз точки y_0. Тогда у петли γ имеется единственное непрерывное поднятие $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to M$, начало которого $\tilde{\gamma}(0)$ совпадает с выбранным прообразом, а $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. При этом конец $\tilde{\gamma}(1)$ пути $\tilde{\gamma}$ также является прообразом точки y_0, но он может и не совпадать с исходным. Он не зависит от выбора пути γ в данном гомотопическом классе замкнутых путей. Тем самым, каждому элементу фундаментальной группы $\pi_1(N, y_0)$ сопоставляется некоторая перестановка — конечного или бесконечного — множества прообразов $p^{-1}(x_0)$: каждый прообраз отображается в конец поднятого пути с началом в этом прообразе. Значит, определено действие фундаментальной группы на множестве прообразов. Это действие называется *монодромией* накрытия.

Пример 0.5.4. Рассмотрим в проколотом единичном диске $D \setminus \{0\}$ путь γ с общим началом и концом y_0, обходящий вокруг прокола один раз в положительном направлении. При отображении проколотого единичного диска в себя $f : z \mapsto z^n$ точка y_0 имеет n прообразов, расположенных в вершинах правильного n-угольника с центром в точке 0. Монодромия вдоль пути γ является циклической перестановкой вершин этого n-угольника — результата его поворота на угол $2\pi/n$ относительно центра.

Упражнение 0.5.5. Как выглядит монодромия того же отображения вдоль пути, дважды обходящего прокол в отрицательном направлении?

Элементы фундаментальной группы $\pi_1(N, y_0)$, задающие перестановки слоя $p^{-1}(y_0)$, оставляющие точку t_0 неподвижной, образуют подгруппу в $\pi_1(N, y_0)$. Эта подгруппа изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(M, x_0)$ накрывающей поверхности. Такое сопоставление устанавливает взаимно однозначное соответствие между подгруппами фундаментальной группы поверхности и классами эквивалентности ее накрытий. При этом два накрытия $p_1 : M_1 \to N$ и $p_2 : M_2 \to N$ мы считаем эквивалентными, если существует гомеоморфизм $h : M_1 \to M_2$, замыкающий коммутативный треугольник, т.е. такой, что $p_2 \circ h = p_1$.

В частности, фундаментальная группа проколотого диска изоморфна бесконечной циклической группе $\mathbb{Z}$. Ее подгруппы это подгруппы $n\mathbb{Z}$, состоящие из чисел, кратных данному натуральному числу n, а также нулевая подгруппа. Накрытия, отвечающие подгруппам конечного индекса, мы описали выше. Нулевой подгруппе соответствует накрытие, которое можно описать следующим образом. Накрывающая поверхность представляет собой горизонтальную полосу $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ (которая, разумеется, гомеоморфна диску) на комплексной прямой, а отображение есть экспоненциальное отображение $z \mapsto e^{2\pi i z}$. В этом случае накрывающая поверхность односвязна — ее фундаментальная группа тривиальна.

Пусть у нас есть конечнолистное накрытие $p : M \to N$ поверхности N, которая представляет собой результат выкалывания нескольких точек из некоторой связной поверхности $\widehat{N}$. Построим поверхность $\widehat{M} \supset M$ добавлением нескольких точек к поверхности M и непрерывное отображение $\hat{p} : \widehat{M} \to \widehat{N}$, продолжающее отображение p, следующим образом. У каждой выколотой точки из $\widehat{N} \setminus N$ есть проколотая окрестность, представляющая собой проколотый диск, такой, что его прообраз в M — несвязное объединение проколотых дисков, причем ограничение отображения p на каждый из этих прообразов эквивалентно отображению $z \mapsto z^{n_i}$ при некоторых n_i. Заклеим каждый из этих дисков центральной точкой и продолжим отображение p по непрерывности в эту точку. Продолженное отображение называется *разветвленным накрытием* поверхности $\widehat{N}$. Отметим, что разветвленное накрытие является накрытием только в том случае, если значения всех степеней n_i для всех выколотых точек равны 1.

В простейшей — и чрезвычайно важной — ситуации речь идет о конечнократных накрытиях проколотой сферы. Пусть поверхность N — это сфера S^2, из которой выколото конечное множество точек $T = \{t_1, \dots, t_c\}$. Возьмем какую-нибудь точку $t_0 \in S^2 \setminus T$. Соединим точку t_0 с каждой из точек t_i несамопересекающимся отрезком гладкой кривой, не проходящим через точки t_j для $j \neq i$. Такому отрезку можно сопоставить путь γ_i, который идет от t_0 к t_i вдоль выбранного отрезка, затем обходит вокруг точки t_i против часовой стрелки, затем возвращается вдоль выбранного отрезка в точку t_0. Выполним теперь это действие с каждым из проколов t_i, следя за тем, чтобы

- отрезки, идущие в проколотые точки, пересекались попарно лишь в базисной точке t_0;

- циклический порядок, в котором отрезки выходят из точки t_0, совпадал бы с порядком нумерации проколотых точек.

В результате получим граф-звезду на S^2 с центром в точке t_0 и лучами, идущими из t_0 в t_i (см. рис. 6).

Рис. 6: Граф-звезда на сфере

Упражнение 0.5.6. Что из себя представляет фундаментальная группа сферы S^2, проколотой в c точках?

Тем самым мы построили набор перестановок $\sigma_1, \dots, \sigma_c$ на прообразе $f^{-1}(y_0) \in Y$, обладающий следующими свойствами:

- подгруппа в S_d, порожденная перестановками $\sigma_1, \dots, \sigma_c$, действует на слое *транзитивно*, т.е. для любой пары точек в прообразе есть перестановка из подгруппы, переводящая первую точку во вторую;

- последовательное произведение $\sigma_c \circ \dots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ всех этих перестановок является тождественной перестановкой.

Упражнение 0.5.7. Докажите эти свойства.

Упражнение 0.5.8. Докажите, что для любого набора точек $T = \{t_1, \dots, t_c\}$ на сфере, любой звезды на этих точках и любого набора перестановок $\sigma_1, \dots, \sigma_c$, обладающих двумя приведенными выше свойствами, существует накрытие $Y \to S^2 \setminus T$, монодромия которого вдоль пути γ_i совпадает с σ_i. Это накрытие единственно, т.е. для двух таких накрытий $f_1 : Y_1 \to S^2$, $f_2 : Y_1 \to S^2$ существует такой гомеоморфизм $h : Y_1 \to Y_2$, что $f_2 = h \circ f_1$.

Упражнение 0.5.9. Проверьте, что цикловой тип (т.е. количество циклов и набор их длин) перестановки σ_i не зависит от выбора базисной точки t_0 и пути, соединяющего ее с t_i.

Упражнение 0.5.10. Пусть накрываемая поверхность представляет собой не сферу, а проколотую поверхность более высокого рода. Как нужно изменить понятия звезды и набора перестановок, чтобы накрывающая поверхность по-прежнему восстанавливалась однозначно?

0.6 Формула Римана–Гурвица

Эйлерова характеристика накрывающей поверхности выражается простой формулой через эйлерову характеристику накрываемой поверхности и степень накрытия. Для разветвленных накрытий формула оказывается более сложной — в нее входят характеристики ветвления.

Теорема 0.6.1 (Риман–Гурвиц)**.** *Пусть $p : M \to N$ — n-листное разветвленное накрытие с k точками ветвления, причем точки ветвления имеют $m_1, \ldots, m_k$ прообразов. Тогда*

$$\chi(M) = n\,(\chi(N) - k) + m_1 + \ldots + m_k.$$

Доказательство. Разобьем поверхность N на два замкнутых множества: $N = N_A \cup N_B$, где N_A — объединение замыканий окрестностей точек ветвления, N_B — замыкание дополнения $N \setminus N_A$ к N_A. Тогда

$$\chi(N) = \chi(N_A) + \chi(N_B) - \chi(N_A \cap N_B).$$

Но множество $N_A \cap N_B$ состоит из нескольких окружностей, поэтому $\chi(N_A \cap N_B) = 0$. Следовательно,

$$\chi(N) = A_N + B_N, \text{ где } A_N = \chi(N_A), B_N = \chi(N_B).$$

Аналогично разобьем поверхность M на замкнутые множества $M_A = p^{-1}(N_A)$ и $M_B = p^{-1}(N_B)$. В результате получим

$$\chi(M) = A_M + B_M, \text{ где } A_M = \chi(M_A), B_M = \chi(M_B).$$

Ограничение отображения p на множество M_B является накрытием, поэтому $B_M = nB_N$, а значит,

$$\chi(M) - A_M = n\,(\chi(N) - A_N)\,.$$

Множество M_A состоит из $m_1 + \ldots + m_k$ непересекающихся кругов, а множество N_A^2 состоит из k непересекающихся кругов. Ясно также, что эйлерова характеристика круга равна 1. Поэтому $A_M = m_1 + \ldots + m_k$ и $A_N = n$. □

Вот еще одно доказательство формулы Римана–Гурвица.

Доказательство. Рассмотрим достаточно мелкую триангуляцию поверхности N, такую, что все точки ветвления являются ее вершинами (у триангуляции могут быть и другие вершины). Слова “достаточно мелкая” здесь означают, что прообраз внутренности каждого треугольника триангуляции состоит из внутренностей треугольников, число которых равно степени n накрытия, и то же самое верно для прообразов внутренностей ребер. Над внутренностью каждого треугольника триангуляции и над внутренностью каждого ее ребра отображение p является неразветвленным накрытием. Поэтому прообразы ребер и треугольников триангуляции поверхности N при отображении p образуют индуцированную триангуляцию поверхности M. Пусть v_N, e_N и f_N — соответственно число вершин, ребер и граней триангуляции поверхности N, а v_M, e_M и f_M — соответственно число вершин, ребер и граней индуцированной триангуляции поверхности M. Тогда $e_M = ne_N$, $f_M = nf_N$ и $v_M = n(v_N - k) + \sum m_i$, откуда

$$\chi(M) = v_M - e_M + f_M = n\chi(M) - nk + \sum m_i,$$

что и требовалось. В этом рассуждении триангуляцию можно заменить произвольным достаточно мелким разбиением поверхности N на многоугольники. $\square$

Формулу Римана–Гурвица можно переписать в другом виде, часто более удобном для приложений. При этом используется не информация о ветвлении над поверхностью-образом N, а информация о ветвлении на поверхности-прообразе M. Если в малой окрестности точки $x_0 \in M$ в некоторых локальных комплексных координатах отображение p устроено как $z \mapsto z^d$, то говорят, что эта точка имеет *индекс ветвления* d (почти во всех точках индекс ветвления равен 1). Пусть $d_1, \ldots, d_{m_1}$ — индексы ветвления над первой точки ветвления, $d_{m_1+1}, \ldots, d_{m_1+m_2}$ — индексы ветвления над второй точкой ветвления и т.д. Тогда

$$d_1 + \ldots + d_{m_1} = d_{m_1} + \cdots + d_{m_1+m_2} = \ldots = n.$$

Пусть $x_1, \ldots, x_l$ — точки, из которых состоят прообразы всех точек ветвления. Тогда

$$\sum_{i=1}^{l}(d_i - 1) = (n - m_1) + (n - m_2) + \ldots = kn - (m_1 + m_2 + \ldots + m_k).$$

Поэтому формулу Римана–Гурвица можно переписать в виде

$$\chi(M) = n\chi(N) - \sum(d_i - 1); \tag{1}$$

здесь можно считать, что суммирование ведется по всем точкам поверхности M, индекс ветвления которых отличен от 1.

Непосредственно из формулы (1) следуют утверждения, сформулированные в упражнениях 0.6.2–0.6.4.

Упражнение 0.6.2. Докажите, что любое разветвленное накрытие тора тором является на самом деле неразветвленным, т.е. индекс ветвления любой точки равен 1.

Упражнение 0.6.3. Пусть $p : M \to N$ — разветвленное накрытие ориентируемых поверхностей. Докажите, что $\chi(M) \leq \chi(N)$.

Упражнение 0.6.4. Пусть $p : M \to N$ — разветвленное накрытие ориентируемых поверхностей. Докажите, что если $\chi(M) = \chi(N) < 0$, то отображение p — изоморфизм.