

Итоговая работа по курсу “Высшая математика”

ФИО _____

Группа _____

ВАРИАНТ 1

1. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$. Докажите, что $f(x_0 + at) - f(x_0) = k \cdot t + o(t)$ при $t \rightarrow 0$ и найдите k .

2. Чему равен определитель квадратной матрицы, имеющей собственное значение $\lambda = 0$.
Ответ обосновать.

3. Найдите ближайшую к точке $(0, 0, -4)$ точку $M(x_1, x_2, x_3)$, координаты которой удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 12 \end{cases}$.

4. Решите матричное уравнение $X \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

5. При каком значении параметра a матрица $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2a-2 & 4 \end{pmatrix}$ имеет собственный вектор $\vec{v} = (a-1; 1; -5)$.

6. Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной, проведенной в точке $(1;1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $\sqrt{xy} + \ln(y) = x^5$.

7. Найдите определенный интеграл $\int_1^2 e^{3/\sqrt{t}} dt$, если $\int_1^x e^{1/\sqrt{t}} dt = F(x)$, где $F(x)$ – заданная функция.

8. Найдите все точки локального экстремума функции $u = -2x^3 - 4y^2 - z^2 + 2yz + 24x + 2y + 4z - 9$. Укажите их вид.

9. Найдите наименьшее значение функции $z = x^2 + y^2 - 6y$ в области, определяемой неравенствами $x \geq -4$, $y \leq 4$, $y - x \geq 4$.

10. Вычислите двойной интеграл $\iint_G (2x + y) dx dy$, где область G ограничена линиями:
 $x = 3y$, $x = 0$, $y = 1$.

Итоговая работа по курсу “Высшая математика”

ФИО _____

Группа _____

ВАРИАНТ 2

1. Пусть вектор \vec{v} – собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному значению $\lambda = \lambda_1$, и \vec{v} – собственный вектор матрицы B , соответствующий собственному значению $\lambda = \lambda_2$. Докажите, что \vec{v} – собственный вектор матрицы $C = A \cdot B$. Какому собственному значению он соответствует?

2. Докажите что если функция $f(x) = f(1) + k(x-1) + o(x-1)$ при $x \rightarrow 1$, то эта функция имеет производную при $x = 1$. Чему равна $f'(1)$?

3. Найдите ближайшую к точке $(0, -4, 0)$ точку $M(x_1, x_2, x_3)$, координаты которой удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -4x_1 + 8x_2 + 2x_3 = -12 \end{cases}$.

4. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

5. При каком значении параметра a матрица $\begin{pmatrix} a+1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ имеет собственный вектор $\vec{v} = (1; 3; a-2)$.

6. Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной, проведенной в точке $(1;1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $x^2 + xy + y^2 = 3$.

7. Найдите определенный интеграл $\int_1^3 e^{-2\sqrt{t}} dt$, если $\int_0^x e^{-\sqrt{t}} dt = F(x)$, где $F(x)$ – заданная функция.

8. Найдите все точки локального экстремума функции $u = -x^3 + y^2 + 2z^2 + yz + 27x - 4y - 9z - 2$. Укажите их вид.

9. Найдите наибольшее значение функции $z = x - y^2 + 4y$ в области, определяемой неравенствами $x \leq 3$, $y \geq 0$, $y - x \leq 0$.

10. Вычислите двойной интеграл $\iint_G (x + 2y) dx dy$, где область G ограничена линиями:
 $x = 6y$, $x = 0$, $y = 1$.

ОТВЕТЫ

ВАРИАНТ 1

2. $a \cdot f'(x_0)$

3. $x_1 = 6 - 5t, x_2 = 0, x_3 = t, t = 1 \quad (1, 0, 1)$

4. $X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

5. $a=2, \lambda=3$

6. $y = 3x - 2$

7. $9\left(F\left(\frac{2}{9}\right) - F\left(\frac{1}{9}\right)\right)$

8. $(2, 1, 3) - \max, (-2, 1, 3) - \text{нет экстремума}$

9. $z_{\min} = z(-0.5, 3.5) = -8.5$

10. 4

ВАРИАНТ 2

3. $x_1 = 2t + 3, x_2 = t, x_3 = 0, t = -2 \quad (-1, -2, 0)$

4. $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

5. $a=3, \lambda=3$

6. $y = -x + 2$

7. $\frac{F(12) - F(4)}{4}$

8. $(-3, 1, 2) - \min, (3, 1, 2) - \text{нет экстремума}$

9. $z_{\max} = z(3, 2) = 7$

10. 10