Листок 1. Гамильтонова механика. Скобки Пуассона.

Все задачи этого листка, кроме отмеченных звездочкой, составляют необходимый минимум.

---

1. 4-векторное поле A^μ в пространстве Минковского (т.е., в 4-мерном пространстве-времени, снабженном метрикой $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$) задано формулами

$$A^0 \,=\, 0, \qquad \bar{A}(t,\bar{r}) \,=\, \bar{R}\cos(\omega t - \bar{k}\bar{r}),$$

где частота ω, амплитуда $\bar{R}$ и волновой вектор $\bar{k}$ — константы.

   1) Определите условия на константы ω, $\bar{k}$ и $\bar{R}$, при которых A^μ является 4-потенциалом свободного электромагнитного поля – плоской волны.

   2) Вычислите соответствуюшие вектора напряженности электрического и магнитного полей – $\bar{E}$ и $\bar{H}$. Докажите, что электромагнитная волна поперечна, т.е. $\bar{E}\perp\bar{k}$ и $\bar{H}\perp\bar{k}$. Убедитесь, что векторные поля электрической и магнитной напряженностей взаимно ортогональны и имеют равные амплитуды.

2. Лагранжиан заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле имеет вид

$$L(\bar{r},\dot{\bar{r}},t) \,=\, \frac{m\,\dot{\bar{r}}^2}{2} \,+\, \frac{e}{c}\,(\dot{\bar{r}},\bar{A}(\bar{r},t)) - e\,\phi(\bar{r},t),$$

где e, m, $\bar{r}$ – заряд, масса и радиус-вектор частицы, а $\bar{A}$ и $\phi\,(=A^0)$ – векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля. Определите обобщенный импульс $\bar{p}$ частицы и гамильтониан $H(\bar{r},\bar{p},t)$ этой механической системы. Выпишите уравнения Гамильтона и убедитесь, что они задают движение заряда под действием силы Лоренца $\bar{F}_L \,=\, e\bar{E} + \frac{e}{c}[\dot{\bar{r}},\bar{H}]$. Напомним, что напряженности магнитного и электрического полей связаны с потенциалами соотношениями $\bar{H} = \left[\frac{\partial}{\partial\bar{r}},\bar{A}\right]$, $\bar{E} = -\frac{\partial\phi}{\partial\bar{r}} - \frac{1}{c}\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}$.

3. **Скобки Пуассона.**
Напомним: локальные координаты $\{q^i,p_i\}_{i=1,\dots,n}$ на пуассоновом многообразии называются *каноническими* (иначе, координатами Дарбу), если скобки Пуассона для них имеют вид $\{q^i,p_j\} \,=\, \delta^i_j$, $\{q^i,q^j\} \,=\, \{p_i,p_j\} = 0$. На фазовом пространстве механической системы обобщенные координаты и импульсы образуют набор канонических координат.

   Проверьте, что для произвольного набора локальных координат $\{z^a(q^i,p_j)\}_{a=1,\dots,2n}$ на фазовом пространстве выражение для скобок Пуассона двух функций $f(z)$ и $g(z)$ в этих координатах имеет вид

$$\{f,g\} \,=\, \frac{\partial f}{\partial z^a}\,\frac{\partial g}{\partial z^b}\,w^{ab}(z), \quad \text{где} \quad w^{ab} \,=\, \{z^a,z^b\}.$$

4. 1) Вычислите скобки Пуассона $\{x_i,M_j\}$, $\{p_i,M_j\}$, $\{M_i,M_j\}$, где $\bar{M} \,=\, [\bar{r},\bar{p}]$ – момент импульса 3-мерной частицы относительно начала координат.

   2)* Для скобок Пуассона из предыдущего пункта постройте несколько (желательно три) нетривиальных функционально независимых функции на фазовом пространстве, скобки Пуассона которых со всеми компонентами момента импульса M_i зануляются.

5. Пуассонова структура на $\mathbb{R}^3$ задается формулами $\{x_i,x_j\} = \varepsilon_{ijk}x^k$, где x_i – декартовы координаты точки в $\mathbb{R}^3$, а ε_{ijk} – полностью антисимметричный тензор 3 ранга, $\varepsilon_{123} = 1$.

   1) Убедитесь, что такое определение скобки Пуассона непротиворечиво.

2) Вычислите скобки Пуассона для сферических координат r, θ, ϕ. Определите ядро данной пуассоновой структуры, то есть подпространство функций на $\mathbb{R}^3$, имеющих нулевые скобки Пуассона со всеми функциями.

3)* Приведите пример двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$, на которой данная пуассонова структура невырождена (то есть ее ядро содержит лишь постоянные функции). Постройте пару канонических координат на этой поверхности.

6. Уравнения Гамильтона порождают 1-параметрическое семейство преобразований алгебры *наблюдаемых* (т.е., функций на фазовом пространстве), называемое *эволюцией*

$$U_t : \quad f(q,p) \ \mapsto \ f_t(q,p) = f(q(t), p(t)).$$

Здесь $q(t)$, $p(t)$ – решение уравнений Гамильтона с начальными условиями $q(0) = q$, $p(0) = p$. Очевидно, отображение эволюции является гомоморфизмом алгебры наблюдаемых. Докажите, что эволюция также сохраняет (т.е., является гомоморфизмом) скобки Пуассона: $\{f, g\}_t = \{f_t, g_t\}$.

7. Напомним, что *интегралом движения* называется наблюдаемая, имеющая нулевую скобку Пуассона с гамильтонианом.

   1) Докажите, что скобка Пуассона двух интегралов движения также является интегралом движения.

   2) Гамильтониан механической системы имеет вид $H(f(q^1, p_1), q^2, p_2, \ldots, q^n, p_n)$, где $\{q^i, p_i\}$ – набор обобщенных координат и импульсов. Докажите, что $f(q^1, p_1)$ является интегралом движения.

8. Найдите закон движения одномерной частицы, функция Гамильтона которой имеет вид

$$H(q,p) \ = \ F(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}), \quad F \text{ – дифференцируемая функция.}$$

9. Найдите закон движения заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле $\bar{H}$. Задающий магнитное поле векторный потенциал $\bar{A}$ выберите в виде

$$A^y \ = \ A^z \ = \ 0, \qquad A^y \ = \ Hx.$$