Л.Г. Рыбников: Темы курсовых работ 2011 года

Задачи, сформулированные в каждой из тем, предлагается решить (или, по крайней мере, начать решать) самостоятельно – это повод для дальнейшего обсуждения и развития темы.

Для 1 курса бакалавриата

(1) **Почти коммутирующие матрицы.**
Задача: Пусть A и B – комплексные матрицы $n \times n$. Доказать, что если $\mathrm{rk}(AB - BA) = 1$, то матрицы A и B приводятся к верхнетреугольному виду в одном и том же базисе.

(2) **Классификация троек подпространств в $\mathbb{R}^n$.**
Задача: классифицировать тройки линейных подпространств в $\mathbb{R}^n$ с точностью до линейного изоморфизма.

(3) **Результант.**
Задача: Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены степеней n и k соответственно. Написать многочлен от коэффициентов $P(x)$ и $Q(x)$, обращающийся в нуль тогда и только тогда, когда многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют нетривиальный общий делитель.

Для 1-2 курсов бакалавриата

(1) **Пфаффиан.**
Задача: Доказать, что определитель кососимметрической матрицы является квадратом некоторого многочлена от ее коэффициентов. Найти явную формулу для этого многочлена.

(2) **Теорема Амицура–Левицкого.**
Задача: Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ – матрицы $n \times n$. Тогда

$$\sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^{\sigma} A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \ldots A_{\sigma(2n)} = 0,$$

где $(-1)^{\sigma}$ означает знак перестановки σ.

(3) **Теорема Шарковского.**
Говорят, что функция $f : [0,1] \to [0,1]$ имеет цикл длины k, если существует набор из k различных точек $x_1, \ldots, x_k \in [0,1]$, для которых $f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3, \ldots, f(x_k) = x_1$.
Задача: доказать, что если непрерывная функция на отрезке $f : [0,1] \to [0,1]$ имеет цикл длины 3, то она имеет цикл любой длины.
Теорема Шарковского является обобщением этого утверждения. А именно, утверждается, что на множестве натуральных чисел имеется линейный порядок $\succ$, такой, что утверждение "если непрерывная функция на отрезке $f : [0,1] \to [0,1]$ имеет цикл длины m, то она имеет цикл длины n" верно тогда и только тогда, когда $n \succ m$.

Для 2-4 курсов бакалавриата и 1 курса магистратуры

(1) **Коприсоединенное представление.**
Пусть $\mathfrak{g}^*$ – коприсоединенное (двойственное к присоединенному) представление конечномерной комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. *Аннулятором* элемента $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ называется подалгебра Ли $\mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}^*(x)\alpha = 0\}$.
Задача: (Теорема Дюфло об аннуляторе) Доказать, что алгебра Ли $\mathfrak{g}_\alpha$ абелева для всех α, лежащих в некотором открытом плотном подмножестве в $\mathfrak{g}^*$.

(2) **Теория Морса на унитарной группе.**
Задача: Пусть A – эрмитова матрица $n \times n$ с различными собственными значениями. Рассмотрим Функцию $f_A(X) := \operatorname{Re}\operatorname{Tr} AX$ на группе Ли U_n. Найти все критические точки этой функции, индексы этих точек, вычислить когомологии многообразия U_n.

(3) **Дифференциальные операторы на проективной прямой.**
Задача: Найти все голоморфные (регулярные алгебраические) дифференциальные операторы на $\mathbb{CP}^1$. Доказать, что алгебра голоморфных дифференциальных операторов на $\mathbb{CP}^1$ порождается векторными полями. Задать эту алгебру образующими и соотношениями.

(4) **Спинорная группа.**
Задача: Доказать, что фундаментальная группа группы Ли $SO(n, \mathbb{R})$ при $n \geq 3$ есть $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Задать явно какое-нибудь точное представление универсальной накрывающей этой группы Ли.

(5) **Группа Ли G_2.**
Алгебра октав $\mathbb{O}$ – неассоциативная вещественная алгебра, состоящая из пар кватернионов (a, b) с умножением $(a, b)(c, d) = (ac - d\bar{b}, \bar{a}d + cb)$ (где черта обозначает сопряжение в кватернионах: $\overline{(x + iy + jz + kt)} = x - iy - jz - kt$).
Задача: Доказать, что группа автоморфизмов алгебры $\mathbb{O}$ является связной компактной группой Ли, и найти ее систему корней.

(6) **Двойственность Хау.**
Задача: Группа $GL(n, \mathbb{C}) \times GL(m, \mathbb{C})$ действует в пространстве $U := \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$. Разложить в прямую сумму неприводимых представлений группы $GL(n, \mathbb{C}) \times GL(m, \mathbb{C})$ представления $S^k U$ и $\Lambda^k U$.