

## Математические основы естествознания

### Задачи к зачету

1. Найти действие  $S(q_0, q_1; t)$  для системы с лагранжианом  $L(q, \dot{q}) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{q}^2}{c^2}}$  при движении по классической траектории от  $q_0$  до  $q_1$  за время  $t$ . Вычислить частные производные  $\partial S / \partial q_1$  и  $\partial S / \partial t$ .
2. Может ли сумма двух времениподобных векторов быть а) пространственноподобным вектором, б) изотропным вектором?
3. Рассмотрим вектор  $\mathbf{B} = \sqrt{3}\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$  в пространстве Минковского с сигнатурой  $(1, -1, -1, -1)$  и ортонормированными базисными векторами  $\mathbf{e}_\mu$ .
  - а) Определить, является ли вектор  $\mathbf{B}$  пространственноподобным, времениподобным или изотропным (светоподобным).
  - б) Найти множество всех векторов, ортогональных вектору  $\mathbf{B}$ .
4. Наблюдатель, движущийся с постоянной 4-скоростью  $\mathbf{u}$ , измеряет параметры свободно двигающейся частицы с массой покоя  $m$  и 4-импульсом  $\mathbf{p}$ . Чему равна измеряемая наблюдателем обычная скорость частицы  $\vec{v}$ ?
5. Наблюдатель, движущийся с постоянной 4-скоростью  $\mathbf{u}$ , измеряет параметры свободно двигающейся частицы с массой покоя  $m$  и 4-импульсом  $\mathbf{p}$ . Чему равна измеряемая наблюдателем энергия частицы?
6. Может ли частица двигаться так, чтобы вектор 4-ускорения оставался постоянным?
7. Зеркало движется перпендикулярно своей плоскости со скоростью  $v$ . На зеркало падает луч света под углом  $\theta$  к плоскости зеркала. Какой угол с плоскостью зеркала образует отраженный луч? Рассмотреть случаи  $v > 0$  и  $v < 0$ .
8. В условиях предыдущей задачи найти, как меняется при отражении частота света (частота пропорциональна энергии фотонов).
9. Частица с массой покоя  $m$ , летящая со скоростью  $\vec{v}$ , сталкивается с неподвижной частицей с массой покоя  $M$  и упруго отражается от нее (летит назад). Найти скорости частиц после столкновения.
10. Может ли изолированный свободный электрон а) испустить фотон, б) поглотить фотон?
11. Нейтральная частица  $A$  с массой покоя  $M$  налетает на такую же покоящуюся частицу. Какой минимальной энергией должна обладать налетающая частица, чтобы стало возможным рождение третьей такой же частицы по схеме  $A + A \rightarrow A + A + A$ ?
12. Протон  $P$  с массой покоя  $M$  налетает на покоящийся протон. Какой минимальной энергией должен обладать налетающий протон, чтобы стало возможным рождение пары протон-антипротон по схеме  $P + P \rightarrow P + P + P + \bar{P}$ ?

13. Частица с массой покоя  $m$  и зарядом  $q$  помещена в однородное электрическое поле  $E$ , направленное вдоль оси  $x$ . Найти закон движения частицы в лабораторной системе отсчета, если в начальный момент частица имела нулевую скорость. Нарисовать мировую линию частицы в координатах  $x, t$ . Найти 4-вектор ускорения частицы.
14. Определить закон движения частицы с массой  $m$  и зарядом  $q$  в однородном магнитном поле  $B$ , направленном по оси  $z$ , если в начальный момент частица имела скорость  $v$  вдоль оси  $x$ . Найти 4-вектор ускорения частицы.
15. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля определяется как  $T^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha} F_{\alpha}^{\nu} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ . Найти след тензора энергии-импульса  $T_{\mu}^{\mu}$  электромагнитного поля.