Листок 2. Квантовая механика. Простейшие системы.

1. Пусть матрица плотности $\Sigma \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ (то есть, самосопряженный неотрицательный оператор с равным единице следом) является проекционным оператором (идемпотентом): $\Sigma^2 = \Sigma$. Состояния квантовомеханической системы, задаваемые такими матрицами плотности, называются *чистыми*.

   (a) Докажите, что ранг проектора Σ равен единице и в линейном пространстве $\mathbb{C}^n$ существует вектор ψ такой, что среднее значение любого самосопряженного оператора $A \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ в состоянии, задаваемом матрицей плотности Σ, можно вычислять по формуле:

   $$\langle A \rangle_\Sigma = (\psi, A\psi).$$

   Выразите матричные элементы Σ_{ij} матрицы плотности $\Sigma = \|\Sigma_{ij}\|$ в некотором ортонормированном базисе $\mathbb{C}^n$ через компоненты вектора ψ в этом же базисе и найдите норму $\|\psi\|^2 := (\psi, \psi)$ вектора ψ.

   (b) Пусть некоторому собственному значению a самосопряженного оператора A отвечает собственный вектор ϕ_a: $A\phi_a = a\phi_a$ с единичной нормой. Пользуясь результатом предыдущего пункта, докажите, что вероятность обнаружить в состоянии Σ значение наблюдаемой A равное a (обозначим эту вероятность символом $P_a(A)$) дается формулой:

   $$P_a(A) = |(\psi, \phi_a)|^2,$$

   где символом $|z|$ обозначен модуль комплексного числа z.

   Описанный в этой задаче вектор ψ называется вектором чистого состояния квантовой системы.

2. Оператор момента импульса (углового момента) квантовомеханической системы является векторным оператором $\bar{L} = (L_1, L_2, L_3)$, компоненты которого удовлетворяют перестановочным соотношениям генераторов алгебры Ли $so(3)$:

   $$[L_a, L_b] := L_a L_b - L_b L_a = i\hbar\, \varepsilon_{abc} L_c, \quad a, b \in \{1, 2, 3\},$$

   где ε_{abc} есть полностью антисимметричный тензор третьего ранга нормированный условием $\varepsilon_{123} = 1$.

   Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{C}^3$ и введем в $\mathrm{End}(\mathbb{C}^3)$ векторный оператор $\bar{M} = (M_1, M_2, M_3)$, компоненты которого в некотором ортонормированном базисе задаются матрицами с матричными элементами следующего вида

   $$(M_a)_{bc} = -i\, \varepsilon_{abc}$$

   (индекс b нумерует строки матрицы, а индекс c ее столбцы).

   (a) Докажите, что операторы M_a являются самосопряженными и пропорциональны компонентам некоторого углового момента (найдите коэффициент пропорциональности).

   (b) Введем два состояния квантовомеханической системы, задаваемые матрицами плотности

   $$\Sigma_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i\alpha & 0 \\ -i\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad \Sigma_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \beta & i\beta & 0 \\ -i\beta & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\beta) \end{pmatrix},$$

   где α и β — вещественные числа. Определите:

i. Какие ограничения на параметры α и β следуют из определения матрицы плотности?
ii. При каких значениях упомянутых параметров матрицы плотности Σ_1 и Σ_2 задают чистые состояния (см. задачу 1)? Что это за состояния? Смесью каких чистых состояний являются состояния Σ_1 и Σ_2 при общих допустимых значениях α и β?
iii. Найдите среднее значение и дисперсию оператора проекции углового момента M_n на произвольное направление $\bar{n}$ (единичный вектор) в сосотояниях Σ_1 и Σ_2, где оператор M_n задается скалярным произведением

$$M_n = \bar{M} \cdot \bar{n} = M_1 n_1 + M_2 n_2 + M_3 n_3.$$

3. В пространстве состояний квантовомеханической системы $\mathbb{C}^2$ компоненты векторного оператора $\bar{M}$, пропорционального угловому моменту (см. задачу 2), заданы следующими матрицами (в некотором ортонормированном базисе)

$$M_a = \frac{1}{2}\,\sigma_a, \qquad a = 1, 2, 3,$$

где 2×2 матрицы σ_a есть так называемые матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Оператор энергии взаимодействия с магнитным полем $\bar{H} = (H_1, H_2, H_3)$ задается выражением

$$W = -\mu\,(\bar{M} \cdot \bar{H}),$$

где μ — положительная константа. Определите:

(a) Спектр оператора энергии W.
(b) Средние значения компонент M_a $a = 1, 2, 3$ в состоянии с максимальной энергией (то есть, в чистом состоянии (см. задачу 1), которому соответсвует собственный вектор оператора энергии W с максимальным собственным значением).

4. Могут ли два самосопряженных оператора Q и P, определенные на пространстве $\mathbb{C}^n$ удовлетворять перестановочным соотношеням вида

$$[Q, P] := QP - PQ = i\hbar\,\mathrm{Id},$$

где Id есть единичный (тождественный) оператор?

5. Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ комплекснозначных финитных функций на вещественной прямой с интегрируемым квадратом модуля. Линейный оператор $K : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ задается ядром $k(x, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, если на любой функции $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ действие оператора $K : f \mapsto Kf$ определяется формулой:

$$Kf(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x, y) f(y) dy.$$

Зададим на пространстве $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ эрмитово скалярное произведение по правилу

$$(f, g) := \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) g(x) dx, \qquad \forall\, f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}),$$

где звездочка обозначает взятие комплексного сопряжения. Определите:

(a) Ядро оператора $K^\dagger$ сопряженного к данному ядерному оператору K относительно указанного выше скалярного произведения.

(b) Самосопряженные операторы заданы ядрами

$$k_1(x,y) = f(x+y), \quad k_2(x,y) = f(x-y), \quad k_3(x,y) = f(x)g(y).$$

Какие ограничения на функции f и g накладывает условие эрмитовости соответствующего оператора?

(c) Можно ли ввести ядро для тождественного оператора на $\mathcal{F}(\mathbb{R})$?

6. В функциональном унитарном пространстве $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, определенном в предыдущей задаче, задан некоторый ядерный самосопряженный оператор K. Какое ограничение на вид ядра $k(x,y)$ этого оператора накладывает условие:

(a) Оператор K коммутирует (перестановочен) с оператором P

$$Pf(x) = -i\hbar\,\frac{df}{dx}.$$

(b) Оператор K коммутирует с оператором Q:

$$Qf(x) = xf(x).$$