Примерные темы для курсовых работ.

И.В.Артамкин

I. Элементарные темы: "дискретная" математика. (Эти темы вполне доступны перокурсникам.)

В нашей стране под названием "дискретная математика" иногда понимается собрание разрозненных математических сюжетов, в разные моменты востребованные в Computer Science. Это не соответствует принятому на нашем факультете взгляду на предмет дискретной математики, однако некоторые из этих сюжетов заслуживают внимания.

1. Теорема Поста о функциональной полноте. Это элементарный критерий полноты системы булевых функций (т.е. условие того, когда через заданный набор функций можно выразить любую). К этому кругу вопросов примыкает так называемая проблема Дедекинда: найти число монотонных булевых функций от n переменных. Вряд ли почти двухсотлетняя проблема может решиться в рамках курсовой работы, но повыдумывать разные оценки никому не возбраняется.

2. Теоремы Менгера связывают число различных (в том или ином смысле) путей, соединяющих две вершины графа, с минимальной мощностью разделяющего их множества (ребер или вершин). Доказательства имеются почти в любом учебнике по теории графов; впрочем, их несложно придумать на свой вкус самому. К этим теоремам примыкает очень популярная у прикладников теорема Форда-Фалкерсона о максимальном потоке в транспортной сети.

3. Паросочетания; теорема Холла; задача об оптимальном назначении. Здесь можно разобрать несколько очень популярных алгоритмов теории графов. Материал стандартный; имеется почти в любом учебнике.

II. Темы для начинающих изучать алгебраическую геометрию. Эти темы, наверное, начиная со 2 курса.

1. Спектр коммутативного кольца и структурный пучок на нем. Это, пожалуй, самая несложная вводная тема, позволяющая понять роль коммутативной алгебры в геометрии. Освоить ее проще всего, прорешав многочисленные упражнения к первым главам маленькой книжечки Атьи и Макдональда "Введение в коммутативную алгебру". Вероятно, значительная часть этих вопросов будет упомянута в курсе С.М.Львовского "Коммутативная алгебра", но их нетрудно разобрать и не слушая этот курс.

Остальные темы этого раздела основаны на различных сюжетах из книги Topics in Classical Algebraic Geometry, написанной И.В.Долгачевым, но еще не изданной (текст имеется на странице автора). В качестве подспорья можно обращаться к любому стандартному учебнику алгебраической геометрии: И.Р.Шафаревич "Основы алгебраической геометрии" или Хартсхорн "Алгебраическая геометрия".

По мере освоения материала можно разбирать, например, следующие сюжеты:

2. Геометрия плоской кубики.
3. Эллиптическая кривая как пересечение двух квадрик в P^3.
4. Теорема Безу на квадрике и поризм Понселе.
5. Гиперэллиптические кривые.
6. Геометрия кривых Веронезе.
7. Геометрия поверхности Веронезе.
8. Многообразие прямых в P^3.

9. Квартика Клейна.

Эти темы можно будет в процессе работы конкретизировать, или, наоборот, расширять.

10. Автоморфизмы алгебраических кривых. Здесь имеется замечательная оценка Гурвица: группа автоморфизмов кривой рода $g > 1$ конечна, причем ее порядок не превосходит $84(g-1)$. Очень интересно разобрать какое-нибудь доказательство этой теоремы (имеются различные по духу и технике подходы).

11. В связи с предыдущим пунктом особый интерес представляют кривые, для которых эта оценка достигается. Первый пример такого рода — квартика Клейна. Дальнейшие результаты в этом направлении получены относительно недавно, и большинство из них связано с модулярной группой и ее подгруппами.

III. Автоморфизмы плоскости. Все постановки задач здесь достаточно элементарные, формально доступные даже первокурснику, но материал очень глубокий и содержательный.

Имеются две интересные бесконечные группы, возникающие в двумерной геометрии.

Одна — это группа всех полиномиальных автоморфизмов аффинной плоскости, т.е. взаимно-однозначных отображений аффинной плоскости на себя, задаваемых парой многочленов. Имеется классическая теорема, утверждающая, что эта группа представляет собой амальгамированное произведение группы аффинных преобразований и так называемой группы треугольных преобразований, действующих по формуле $(x; y) \mapsto (x + P(y); y)$, где $P(y)$ — произвольный многочлен. Разбор доказательства — достойная тема для курсовой. К этому кругу вопросов примыкает знаменитая проблема якобиана: доказать, что если якобиан полиномиального отображения аффинной плоскости в себя постоянен, то это отображение обратимо. В процессе тщетных попыток это доказать в 50-х годах прошлого века Connell, Bass и Wright изобрели замечательную формулу обращения рядов суммированием по деревьям ("tree-inversion formula"), которая тоже может быть темой для курсовой. (Не исключено, что некоторые варианты этой формулы упоминаются в нашем курсе дискретной математики.)

Вторая — это группа бирациональных автоморфизмов проективной плоскости ("группа Кремоны"), которая содержит предыдущую группу как подгруппу. (Для этого сюжета уже потребуются некоторые понятия из алгебраической геометрии.) Классический результат, который здесь необходимо разобрать, это теорема о том, что группа Кремоны порождена квадратичными преобразованиями. С этой группой связано множество других замечательных результатов, которые тоже можно разбирать в качестве курсовой работы (много сюжетов имеется, например, в упомянутой в предыдущем разделе книжке Долгачева), а также знаменитая проблема Нетера: уже более ста лет никто не может доказать, что группа Кремоны проста.

IV. Графы, многогранники, решетки. Для этих задач не требуется особенно сложных понятий, но эти работы будут не реферативными, а исследовательскими.

В одной из моих работ имеется любопытная конструкция, позволяющая по любому графу построить пару рефлексивных центрально-симметричных многогранников (разной размерности), каждый из которых однозначно определяет второй. По поводу этой конструкции имеется довольно много невыясненных, и, вероятно, не очень сложных вопросов. Например, было бы интересно охарактеризовать многогранники, получающиеся этой конструкцией из графов, распространить эту двойственность на произвольные центрально-симметричные рефлексивные многогранники, не обязательно возникающие из графов, и т.д. Интересным инвариантом графа, вероятно, является объем получающегося многогранника; в этом направлении пока не сформулировано даже гипотез. Интересно было бы хотя бы просто обсчитать первые нетривиальные примеры. Весь этот сюжет имеет, конечно, алгебро-геомерический подтекст: речь идет о торических многообразиях Фано, возникающих как естественная компактификация обобщенных якобианов некоторых приводимых кривых. Но для решения перечисленных вопросов это, вероятно, не так уж важно.