Теория вероятностей. Листок 2 (**Крайний срок сдачи — 21 октября**)

Меры и σ-алгебры. Математическое ожидание и дисперсия.
Функция и плотность распределения. Пары независимых случайных величин.

Случайные величины ξ, η называются независимыми, если любые два события $\xi^{-1}(A), \eta^{-1}(B)$ независимы ($A, B \subset \mathbb{R}$ — борелевские множества). Используется обозначение: с.в. ="случайная величина".

1) (Пополнение меры). Пусть μ — конечная неотрицательная мера на σ-алгебре $\mathcal{A}$. Доказать, что множества вида $B \cup C$, где $B \in \mathcal{A}, C \subset A \in \mathcal{A}$ и $\mu(A) = 0$ образуют σ-алгебру. Зададим на этих множествах меру μ формулой $\mu(B \cup C) = \mu(B)$. Доказать, что продолжение корректно определено и задает σ-аддитивную меру.
2) Пусть P — борелевская вероятностная мера на $\mathbb{R}^n$, принимающая значение 0 на каждом одноэлементном множестве. Доказать, что функция $A \to P(A)$ принимает все значения от 0 до 1.
3) Доказать, что для любой борелевской вероятностной меры μ на $\mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ и борелевского множества A существует такой компакт $K \subset A$, что $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$.
4) Вывести формулу включений и исключений из свойств математического ожидания.
5) (Задача о беспорядке) n конвертов с разными адресами и вложенными письмами рассыпали на полу. Все письма вылетели из конвертов. Случайным образом письма раскладываются по конвертам. Найти мат. ожидание и дисперсию числа ξ дошедших по адресу писем.
6) (Д. Бернулли) $2n$ человек образуют n пар. Из них ровно m человек умерло. Найти среднее число выживших пар.
7) Найти все моменты $\mathbb{E}\xi^n$ показательной с.в. (плотность ξ равна $f_\xi = I_{[0,\infty)} \lambda e^{-\lambda x}$).
8) Производящей функцией дискретной с.в. ξ со значениями в целых неотрицательных числах называется функция $\varphi_\xi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n P(\xi = n)$.
   1) доказать, что производящая функция суммы независимых с.в. является призведением производящих функций этих с.в.
   2) найти распределение суммы независимых пуассоновских с.в. с параметрами λ, μ.
9) С.в. ξ имеет показательное распределение $P(\xi \le x) = 1 - e^{-\alpha x}$ ($x \ge 0$). Найти плотность распределения с.в. 1) $\sqrt{\xi}$, 2) ξ^2, 3) $\frac{1}{\alpha} \ln \xi$, 4) $\{\xi\}$, 5) $1 - e^{-\alpha\xi}$.
10) Случайная точка B равномерно распределена на окружности $x^2 + (y - a)^2 = r^2$ с центром в точке $A = (0, a)$. Найти плотность распределения случайной точки, находящейся на пересечении оси абсцисс с прямой AB.
11) 1) (Неравенство Иенсена). Докажите, что если f — выпуклая функция и $\mathbb{E}|f(\xi)| < \infty$, то $\mathbb{E}f(\xi) \ge f(\mathbb{E}\xi)$. 2) (Неравенство Гиббса) Пусть ξ, η — случайные величины, f_ξ, f_η — плотности их распределений. Доказать неравенство $\mathbb{E} \log f_\xi(\xi) \ge \mathbb{E} \log f_\eta(\xi)$.
12) 1) С.в. θ является суммой двух независимых с.в., $\theta = \xi + \eta$, одна из которых непрерывна, а другая дискретна. Найдите ее плотность распределения в терминах (функций/плотностей) распределений ξ и η.
   2) С.в. θ является суммой двух независимых с.в., $\theta = \xi + \eta$, одна из которых дискретна, а другая сингулярна. Доказать, что θ сингулярна.
13) Доказать соотношения
   1) $\mathbb{E}|\xi| = \int_0^\infty \mu(|\xi| > t)\, dt$.
   2) Если функция распределения F_ξ с.в. ξ имеет обратную, то $\mathbb{E}\xi = \int_0^1 F_\xi^{-1}(t)\, dt$.
   3) Если $F_\eta \le F_\xi$, то $\mathbb{E}\eta \ge \mathbb{E}\xi$.
   4) (корреляционное неравенство) $\int_0^1 F_\xi^{-1}(t) F_\eta^{-1}(t)\, dt \ge \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$.
14) Имеется случайная величина U, равномерно распределенная на $[0, 1]$, и симметричная монетка. Как с их помощью построить с.в. с плотностью $f(x) = \frac{1}{4}\big(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\big),\ x \in [0, 1]$?
15) Точка (ξ_1, ξ_2) случайно распределена на квадрате $[0, a] \times [0, a]$. Доказать, что $|\xi_1 - \xi_2|$ и $\min(\xi_1, \xi_2)$ одинаково распределены.
16) Сумму двух независимых с.в., равномерно распределенных на множестве $\{0, 1, \cdots, 9\}$ можно записать в виде $10\psi_1 + \psi_2$. Найти функции распределения с.в. ψ_1, ψ_2. Независимы ли они?
17) Пусть ξ, X —независимые с.в., причем ξ — симметричная бернуллиевская с.в. ($P(\xi = \pm 1) = \frac{1}{2}$). Доказать, что $\xi \cdot X$ и X независимы тогда и только тогда, когда X симметрична (т.е. распределения X и $-X$ совпадают).