Теория вероятностей. Листок 3. **(Крайний срок сдачи — 21 октября)**

Многомерные функции распределения.
Последовательность испытаний Бернулли. Теорема Муавра-Лапласа.
Неравенство Чебышева. Энтропия.

1) (Многомерные функции распределения 1).

1) Доказать, что $\min(x, y)$ и $\max(x+y-1, 0)$ (при $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$) являются двумерными функциями распределения некоторого случайного вектора (ξ_1, ξ_2) со значениями в $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$.

2) Доказать, что для любой двумерной функции распределения F выполнены неравенства

$$\max(F_1(x) + F_2(y) - 1, 0) \leq F(x, y) \leq \min(F_1(x), F_2(x)),$$

где F_1 и F_2 — функции распределений ξ_1 и ξ_2.

2) (Многомерные функции распределения 2).

Доказать, что в случайном векторе $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ компоненты ξ_i независимы тогда и только тогда, когда многомерная функция распределения F_ξ является произведением одномерных функций распределения случайных величин ξ_i: $F_\xi(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_{\xi_i}(x_i)$.

3) (Многомерные функции распределения 3. (теорема Скляра))

Пусть $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ — случайный вектор со значениями в $[0,1]^n$, причем каждая случайная величина ξ_i имеет равномерное распределение на $[0,1]$. Любая функция вида $C(t_1, \cdots, t_n) = F_\xi(t_1, \cdots, t_n)$ называется копулой.

Докажите, что любая функция распределения F_η допускает представление

$$F_\eta = C(F_{\eta_1}, \cdots, F_{\eta_n}),$$

где C — некоторая копула, $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$.

4) Каково приближенное значение вероятности того, что из случайной выборки в 365 человек ровно двое родились в Новый Год?

5) Из множества $S = \{1, 2, \cdots, N\}$ случайно и независимо выбираются r подмножеств $A_1, \cdots, A_r$ таким образом, что каждый элемент из S независимо от других включается в A_i с вероятностью p, либо с вероятностью $q = 1 - p$ не включается. Найти вероятность того, что выбранные подмножества попарно не пересекаются.

6) В схеме Бернулли p — вероятность исхода 1 и $q = 1 - p$ — вероятность исхода 0. Найти вероятность того, что цепочка, состоящая их двух нулей подряд, появится раньше цепочки 01.

7) (Теорема Муавра-Лапласа)

1) Пусть ξ_n — число успехов в n независимых испытаниях Бернулли с вероятностью успеха, равной 1/2. Найти приближенные значения

$$P\Big(|\xi_n - \frac{n}{2}| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}\Big),\ P\Big(|\xi_n - \frac{n}{2}| \geq \frac{\sqrt{n}}{2}\Big)$$

при больших значениях n.

2) Драгоценное кольцо спрятано в одном из ящиков с номерами $\cdots -2, -1, 0, 1, 2 \cdots$. Вам разрешают искать его в 11 произвольных ящиках. Вам дают следующую подсказку: при подкидывании монеты 100 раз вы узнаете сумму номера ящика с кольцом и числа выпавших гербов. Она оказалась равна 75. 1) Какие 11 ящиков следует проверить? 2) оцените вероятность найти кольцо в этих 11 ящиках.

8) Каково наибольшее значение энтропии на множестве дискретных случайных величин с n значениями?

9) Рассматриваются M ячеек, занумерованных числами $1, 2, \cdots, M$. Предположим, что в ячейке с номером n находится один белый шар и n черных. Производится случайный выбор по одному шару из каждой из M ячеек. Пусть S_M — число вынутых белых шаров. Докажите, что $\lim_M P(|\frac{S_M}{\ln M} - 1| \geq \varepsilon) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$.

10*) (Концентрация статистических сумм вокруг своего среднего. Неравенство Чернова.). Пусть X_n — последовательность независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха, равной $p > 1/2$. Доказать неравенство $P(S_n > \frac{n}{2}) \geq 1 - e^{-2n(p-\frac{1}{2})^2}$. Указание: докажите, что $P(S_n \geq \frac{n}{2}) \leq \frac{\prod_{i=1}^n \mathbb{E}e^{aX_i}}{e^{\frac{an}{2}}}$ для любого $a > 0$ и минимизируйте выражение по a.