Теория вероятностей. Листок 1

Элементы комбинаторики. Формула включений и исключений.
Итерации и рекуррентные соотношения.
Независимость. Условная вероятность. Формула полной вероятности и формула Байеса.

1) (Задача о днях рождения) Найти вероятность того, что в группе из n человек хотя бы у двоих совпадают дни рождения. При каких значениях n эта вероятность превосходит $1/2$? (для ответа на этот вопрос разрешается пользоваться вычислительной техникой).
2) (Задача о беспорядке) n конвертов с разными адресами и вложенными в них письмами рассыпали на полу. Все письма вылетели из конвертов. Случайным образом письма раскладываются по конвертам. Найти вероятность того, что ни одно письмо не попало в свой конверт.
3) В урне 3 белых, 5 черных, 2 красных шара два игрока извлекают поочередно шары без возвращения. Выигрывает тот, кто первым вытянет белый шар. Если появляется красный шар, то объявляется ничья. Найти вероятности выигрыша первого, выигрыша второго и вероятность ничьи.
4) 1) (Геометрическое распределение). Игроки A, B подбрасывают кость (в порядке AB...) до выпадания 6. Тот, у кого выпало 6 — проигравший. Найти вероятность того, что произведено n бросаний. Найти вероятность того, что A — проигравший.
   2) Игроки A, B, C подбрасывают кость (в порядке ABC...). Тот, у кого выпало 6, выбывает. Найти вероятность того, что A — 1) первый, 2) второй по счету выбывший.
5) (Закон Мэрфи) Монета подбрасывается бесконечное число раз. Доказать, что любая заданная последовательность длины n встретится с вероятностью 1.
6) Брошено две игральные кости. Положим $A_l = \{$число очков, выпавшее на первой кости, делится на $l\}$,
$$B_l = \{\text{число очков, выпавшее на второй кости, делится на } l\},$$
$C_l = \{$сумма очков, выпавших на первой и второй костях, делится на $l\}$. Отправляясь от классического определения вероятности, установить, являются ли независимыми следующие пары событий: а) A_r, B_k, б) A_2, C_2, в) A_4, C_4.
7) Случайная точка (X, Y) равномерно рапределена на квадрате $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Когда события $A = \{|X - Y| \geq r\}$ и $B = \{X + Y \leq 3r\}$ независимы?
8) Брошено две игральные кости. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Найти условную вероятность того, что выпали две пятерки, если известно, что сумма выпавших очков делится на пять.
9) Из 100 карточек с числами 00, 01, ..., 98, 99 случайно выбирается одна. Пусть ν_1 и ν_2 — соответственно сумма и произведение цифр на выбранной карточке. Найти $P(\nu_1 = 0|\nu_2 = 0)$.
10) Из урны, содержащей M белых и $N - M$ черных шаров, по одному без возвращения извлекаются все шары. Используя определение случайного выбора в терминах условных вероятностей, найти вероятности событий: $A_k = \{$k-й шар белый$\}$, $B_{k,l} = \{$k-й и l-й шары белые$\}$, $C_{k,l} = \{$k-й шар черный, а l-й белый$\}$.
11) Из множества всех подстановок степени n случайно выбирается одна. Найти вероятности событий:
    а) выбрана тождественная подстановка;
    б) выбранная подстановка элементы $i_1, i_2, \cdots, i_k$ переводит в элементы $j_1, j_2, \cdots, j_k$ соответственно;
    в) элемент i в выбранной подстановке образует единичный цикл;
    г) элементы $1, 2, 3$ образуют цикл длины 3
    д) все элементы образуют один цикл.
12) В пруду водится b ершей и c карасей. 1) Вы поймали n рыб. Найти вероятность того, что среди них x ершей. 2) Вы поймали n рыб и выпустили их обратно. Потом вы поймали m рыб. Найти вероятность того, что k ершей были пойманы дважды.
13) Вероятность того, что в справочное бюро в течение часа обратятся k человек равна $e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ Вероятность для каждого позвонившего, что он не получит ответ на свой вопрос, равна p. Найти вероятность того, что ровно s обратившихся не получат ответы на свои вопросы.
14) Отрезок $[0, a]$ случайной точкой делится на две части, из которых случайным образом выбирается одна часть. Для произвольного t найти $P(\eta \leq t)$, где η — длина выбранной части.

15) Три мухи случайно и независимо садятся на круглый арбуз радиуса 1. Если расстояние между двумя из них меньше $\pi/2$, то обе улетают. Найти вероятность того, что на арбузе останутся три мухи.
16) Из множества чисел $\{1, 2, ..., N\}$ по схеме случайного выбора без возвращения выбираются три числа. Найти условную вероятность того, что третье число попадет в интервал, образованный первыми двумя, если известно, что первое число меньше второго.
17) У человека пять монет в кармане. Две с двумя гербами, одна с двумя решетками и две нормальные. 1) Человек закрывает глаза, достает наугад монету и подкидывает. Найти вероятность того, что нижняя сторона — герб. 2) Он открывает глаза и видит, что сверху герб. Какова вероятность того, что снизу герб? 3) Он закрывает глаза и подкидывает монету снова. Какова вероятность того, что нижняя сторона — герб? 4) Он открывает глаза и видит, что сверху герб. Какова вероятность того, что снизу герб?
18) По каналу связи передается одна из последовательностей букв $AAAA, BBBB, CCCC$ с вероятностями p_1, p_2, p_3 ($p_1+p_2+p_3 = 1$). Каждая передаваемая буква принимается правильно с вероятностью α и с вероятностью $(1-\alpha)/2$ искажается и превращается в одну из оставшихся букв. Найти вероятность того, что было передано $AAAA$, если принято $ABCA$.