Квантовая механика. Вопросы к зачету

модуль I 25 октября 2011 г.

A. Классическая механика: повторение

1. Лагранжиан. Принцип наименьшего действия. Уравнения Эйлера-Лагранжа. Законы сохранения. Задача двух тел с центральным взаимодействием.
2. Преобразование Лежандра. Обобщенный импульс, гамильтониан. Уравнения Гамильтона. Скобка Пуассона и ее свойства. Теорема Лиувилля.
3. Сила Лоренца. Лагранжиан частицы в электромагнином поле. 4-вектор потенциала и тензор напряженности электромагнитного поля.
4. Уравнения Максвелла для свободного электромагнитного поля. Волновое уравнение, плоские волны.

Литература для подготовки: Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, “Теория поля”, том 2 курса “Теоретическая физика”, М., Наука, 1985, главы III, IV и VI.

B. Постулаты квантовой механики

1. Наблюдаемые в классической и квантовой механике. Основные свойства эрмитовых операторов (над конечномерными пространствами) и их физическая интерпретация в квантовой механике.
2. Состояния в классической и квантовой механике. Матрица плотности и ее свойства.
3. Чистые и смешанные состояния в классической и в квантовой механике. Пространство состояний в квантовой механике.
4. Среднее значение наблюдаемой в смешанном и в чистом состояниях. Собственные значения и собственные вектора наблюдаемых и их физический смысл.
5. Дисперсия. Свойства дисперсии чистых и смешанных состояний в классической и квантовой механике. Общие соотношения неопределенности Гейзенберга. Соотношения неопределенности для пары наблюдаемых координата-импульс.
6. Принцип соответствия. Соответствие скобки Пуассона и коммутатора в уравнениях движения и на алгебре наблюдаемях. "Физическое"($\circ$) и "математическое"($\cdot$) умножения в алгебре наблюдаемых квантовой механики. Неоднозначность математической процедуры квантования.
7. Эволюция наблюдаемых в классической и квантовой механике. Картины эволюции: Гамильтона и Лиувилля, Гейзенберга и Шредингера. Оператор эволюции в квантовой механике.
8. Эволюция чистых состояний в квантовой механике. Уравнение Шредингера. Стационарное уравнение Шредингера. Принцип суперпозиции.

Литература для подготовки: Л.Д. Фаддеев, О.А. Якубовский, “Лекции по квантовой механике для студентов-математиков”, изд. Ленинградского университета, 1980, параграфы 1-9.

С. Задачи к зачету

На зачете может быть предложена любая из задач, содержащихся в первом и втором листках, а также приведенные ниже задачи.

1. Вычислите дисперсию наблюдаемой $M \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$ в чистом состоянии, определяемом вектором $\psi \in \mathbb{C}^2$, если

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

2. Какие из приведенных ниже матриц могут представлять (в ортонормированном базисе) матрицу плотности некоторого состояния квантовой системы

$$\Sigma_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3i \\ 3i & 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_4 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix}.$$

   Изменится ли ответ, если эти матрицы записаны в некотором произвольном (не обязательно ортонормированном базисе) пространства $\mathbb{C}^2$?

3. Разложите в выпуклую комбинацию чистых состояний матрицу плотности

$$\Sigma = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -2i \\ 2i & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Эволюция квантовомеханической системы задается гамильтонианом $H \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$. Напишите уравнение Гейзенберга для наблюдаемой, которая в начальный момент $t = 0$ задана самосопряженным оператором $A(0)$. Найдите решение уравнения движения и постройте оператор эволюции в случае

$$H = \varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon > 0, \quad A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Эволюция квантовомеханической системы задается гамильтонианом $H \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$. Напишите уравнение Шредингера для состояния, матрица плотности которого в начальный момент $t = 0$ задана оператором $\Sigma(0)$. Найдите решение уравнения движения и постройте оператор эволюции в случае

$$H = \varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon > 0, \quad \Sigma(0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$