Глава 3

Кривые в проективных пространствах

Как мы увидим ниже, проективная плоскость (как и любая двумерная поверхность) слишком тесна, чтобы в нее можно было вложить любую гладкую кривую. В трехмерном пространстве свободы гораздо больше. Однако задавать кривые в трехмерном проективном пространстве и пространствах более высокой размерности сложнее, чем кривые на плоскости. В этой главе мы обсудим способы задания таких кривых.

3.1 Определение и примеры

Начнем с примера.

Пример 3.1.1. Построим отображение проективной прямой $\mathbb{CP}^1$ в проективное пространство. Для этого

- введем однородные координаты $(t_0 : t_1)$ в $\mathbb{CP}^1$;
- введем однородные координаты $(z_0 : z_1 : z_2 : z_3)$ в $\mathbb{CP}^3$;
- рассмотрим отображение из $\mathbb{CP}^1$ в $\mathbb{CP}^3$, заданное формулой

$$(t_0 : t_1) \mapsto (t_0^3 : t_0^2 t_1 : t_0 t_1^2 : t_1^3).$$

Упражнение 3.1.2. Проверьте, что это отображение невырожденное и взаимнооднозначное на свой образ.

Образ проективной прямой при построенном отображении лежит на каждой из следующих квадрик:

$$\begin{aligned} z_0 z_3 - z_1 z_2 &= 0; \\ z_1^2 - z_0 z_2 &= 0; \\ z_2^2 - z_1 z_3 &= 0, \end{aligned}$$

и его можно определить как пересечение этих квадрик.

Упражнение 3.1.3. Проверьте, что пересечение любых двух из указанных в примере квадрик не совпадает с образом построенного отображения (т.е. содержит лишние точки).

Приведенный пример показывает, что трудно ожидать, чтобы кривая в проективном пространстве представлялась в виде пересечения *двух* гладких гиперповерхностей (в общем случае n-мерного проективного пространства — в виде пересечения $n-1$ гладких гиперповерхностей). Поэтому соответствующее определение естественно давать лишь *локально.*

Гладкой кривой в n-мерном проективном пространстве называют такое множество точек C, что для любой точки $A \in C$ из этого множества существует такая окрестность этой точки и такой набор однородных многочленов $F_1, \dots, F_{n-1}$, что в выбранной окрестности C совпадает с пересечением гиперповерхностей $F_1 = 0, \dots, F_{n-1} = 0$, а дифференциалы $dF_1, \dots, dF_{n-1}$ линейно независимы в точке A.

С топологической точки зрения гладкая кривая представляет собой ориентируемую двумерную поверхность.

Упражнение 3.1.4. Проверьте, что образ проективной прямой в приведенном выше примере является гладкой кривой.

Степень гладкой плоской алгебраической кривой определяется как одно из двух совпадающих между собой натуральных чисел — либо как степень задающего эту кривую однородного многочлена, либо как число точек пересечения кривой с проективной прямой общего положения. В пространстве первое определение не работает, а второе переносится без существенных изменений. *Степенью* гладкой кривой в проективном пространстве называют количество точек пересечения кривой с гиперплоскостью общего положения.

Упражнение 3.1.5. Вычислите степень кривой-образа из рассматриваемого примера.

Интересный пример кривой дает пересечение двух квадрик общего положения в $\mathbb{CP}^3$. Сечение двух квадрик в $\mathbb{CP}^3$ гиперплоскостью общего положения представляет собой пару коник общего положения. Они пересекаются в четырех точках, поэтому рассматриваемая кривая имеет степень 4. Покажем, что ее род равен 1, т. е. она гомеоморфна тору. Пусть наши квадрики задаются уравнениями $F(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0$ и $G(x, y, z, w) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 = 0$.

Упражнение 3.1.6. Докажите, что эти две квадрики пересекаются трансверсально, т. е. в точках их пересечения дифференциалы dF и dG линейно независимы.

Рассмотрим отображение $p : \mathbb{CP}^3 \setminus (0 : 0 : 0 : 1) \to \mathbb{CP}^2$, переводящее точку $(x : y : z : w)$ в точку $(x : y : z)$. Отображение p переводит пересечение квадрик в конику $ax^2 + by^2 + cz^2 = d(x^2 + y^2 + z^2)$; это отображение является 2-листным разветвленным накрытием с точками ветвления в точках пересечения коник $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Получаем

2-листное разветвленное накрытие сферы S^2 с 4 точками ветвления (ввиду двулистности накрытия, простыми). Поэтому накрывающая поверхность представляет собой тор. Поскольку условие трансверсальности пересечения двух квадрик это алгебраическое условие на пространстве пар квадрик, мы можем заключить, что *пересечение любых двух трансверсально пересекающихся квадрик в трехмерном проективном пространстве является гладкой кривой рода* 1.

Упражнение 3.1.7. а) Докажите, что отображение

$$(x_1 : x_2) \mapsto (x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2)$$

является биголоморфным отображением проективной прямой $\mathbb{CP}^1$ на конику $z_2^2 = z_1z_3$ в $\mathbb{CP}^2$.
б) Докажите, что отображение

$$\{(x_1 : x_2), (y_1 : y_2)\} \mapsto (x_1y_1 : x_1y_2 : x_2y_1 : x_2y_2)$$

является биголоморфным отображением произведения $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ на квадрику $z_1z_4 = z_2z_3$ в $\mathbb{CP}^3$.

В качестве еще одного примера кривой в $\mathbb{CP}^n$, обобщающего рассмотренный нами выше пример кривой в $\mathbb{CP}^3$, рассмотрим образ проективной прямой $\mathbb{C}P^1$ при отображении

$$(x : y) \mapsto (x^n : x^{n-1}y : \dots : y^n). \tag{3.1}$$

Эта кривая лежит в пересечении гиперповерхностей

$$z_1^2 = z_0z_2,\ z_2^2 = z_1z_3, \dots,\ z_{n-1}^2 = z_{n-2}z_n,$$

но, как мы видели на примере $n = 3$, не совпадает с этим пересечением.

Обозначим полученную кривую Γ_n. Отображение (3.1) взаимно однозначно, поэтому род кривой Γ_n равен 0. Легко проверить, что степень кривой Γ_n равна n. В самом деле, гиперплоскость $a_0z_0 + a_1z_1 + \ldots + a_nz_n = 0$ пересекает кривую Γ_n в таких точках, что $a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, где $t = x/y$. Таким образом, точки пересечения кривой Γ_n и гиперплоскости соответствуют корням многочлена степени n, а у многочлена степени n ровно n корней с учетом кратностей. Поэтому кривая Γ_n называется *рациональной нормальной кривой степени* n. Ее частный случай кривая Γ_3 носит название *скрученной кубики.*

Упражнение 3.1.8. Докажите, что а) любая гладкая рациональная кривая степени n в $\mathbb{CP}^n$ при подходящем выборе координат совпадает с рациональной нормальной кривой степени n; б) любые $n + 1$ различных точек на рациональной нормальной кривой степени n линейно независимы; в) через любые $n + 3$ различных точек в $\mathbb{CP}^n$ в общем положении (т.е. таких, никакие $n + 1$ из которых не лежат на одной гиперплоскости) проходит ровно одна рациональная нормальная кривая.

Утверждение а) показывает, что в каждой степени есть по существу одна рациональная нормальная кривая. Она является важным геометрическим инструментом при изучении свойств многочленов от одной переменной.

Упражнение 3.1.9. Пусть пересечение двух различных квадрик в $\mathbb{CP}^3$ содержит скрученную кубику. Докажите, что в этом случае оно является объединением этой кубики и прямой. Проверьте справедливость этого утверждения для пар квадрик, приведенных после примера 3.1.2.

Упражнение 3.1.10. Опишите семейство всех квадрик в $\mathbb{CP}^3$, содержащих данную скрученную кубику.

3.2 Вложения и погружения кривых

При проектрировании проективного пространства на подпространство меньшей размерности кривые в исходном пространстве переходят в кривые в подпространстве. Этим свойством можно воспользоваться для реализации кривых в пространствах возможно меньшей размерности.

Теорема 3.2.1. *Всякую кривую можно вложить в трехмерное проективное пространство.*

Доказательство. Если кривая является проективной прямой или она уже вложена в проективную плоскость или в проективное пространство, то все доказано. Докажем теперь, что кривую, вложенную в проективное пространство размерности, большей 3, можно спроектировать в пространство на единицу меньшей размерности, причем образ будет гладкой кривой, а проекция — взаимно-однозначной на образ.

Пусть $C \subset \mathbb{CP}^n$ — кривая, $n \geq 4$. Сопоставим этой кривой многообразие ее хорд — подмногообразие в $\mathbb{CP}^n$, представляющее собой замыкание объединения прямых, соединяющих две точки кривой (в это замыкание попадают и точки касательных к кривой) (см. рис. 3.1). Подмногообразие хорд не более, чем трехмерно, поскольку его точки параметризуются тремя параметрами: двумя точками кривой и точкой проходящей через них прямой. Поэтому оно не совпадает со всем объемлющим проективным пространством $\mathbb{CP}^n$. Тем самым, в проективном пространстве есть точка, не лежащая в подмногообразии хорд. Проекция из этой точки отображает кривую C в проективное пространство $\mathbb{CP}^{n-1}$, причем взаимнооднозначно на образ этой кривой.

Следующее упражнение завершает доказательство.

Упражнение 3.2.2. Докажите, что образ кривой C при таком проектировании является гладкой кривой.

Замечание 3.2.3. Как само утверждение, так и его доказательство, совпадают. по существу, с теоремой Уитни о вложимости k-мерного многообразия в $2k+1$-мерное пространство и ее доказательством.

Рис. 3.1: Запрещенные направления проецирования кривой

Упражнение 3.2.4. Докажите, что при $n > 3$ на кривой C в $\mathbb{CP}^n$, не содержащейся ни в какой гиперплоскости, можно найти такую точку, проектирование из которой является биголоморфным отображением кривой.

Упражнение 3.2.5. Докажите, что при проектировании кривой из общей точки, не лежащей на кривой, ее степень сохраняется. Докажите, что при проектировании кривой из общей точки кривой ее степень падает на 1.

Для гладкой кривой в трехмерном пространстве мы уже не можем, вообще говоря, выбрать такой центр проектирования, чтобы образ кривой был гладким. Однако мы можем добиться того, чтобы этот образ имел лишь простейшие особенности — точки трансверсального самопересечения. Такое отображение кривой в плоскость называется *погружением.*

Теорема 3.2.6. *Всякую комплексную кривую C можно отобразить в проективную плоскость $\mathbb{CP}^2$ таким образом, что у образа кроме гладких точек есть лишь точки простого (т.е. двукратного) трансверсального самопересечения, на дополнении к этим точкам отображение локально биголоморфно, а у каждой двойной точки два прообраза.*

Доказательство. Согласно предыдущей теореме, кривая C допускает вложение в комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^3$. Подберем в этом пространстве такую точку, проекция из которой при ограничении на C взаимнооднозначна и биголоморфна на образ всюду, за исключением конечного числа точек образа, имеющих два прообраза, причем две ветви образа в этих точках пересекаются трансверсально. Такая точка действительно существует: достаточно взять ее не лежащей на двумерном подмногообразии в $\mathbb{CP}^3$, состоящем из нескольких компонент:

- объединение касательных прямых к кривой C;
- объединение "особых" хорд, т.е. хорд, на которых лежат больше двух точек кривой C, а также хорд, проходящих через такие две точки кривой C, что подпространство, натянутое на касательные вектора в них и саму хорду двумерно.

Проекция из такой точки обладает требуемыми свойствами.

Пусть теперь образ кривой C при погружении в плоскость является кривой степени d с δ двойными точками. Найдем род кривой C по этим данным.

Предположим, что погруженная кривая задается уравнением $f = 0$ в карте $z = 1$, причем обе касательные в каждой двойной точке невертикальны. По теореме Безу число точек пересечения погруженной кривой с кривой, заданной уравнением $\partial f/\partial y = 0$, равно $d(d-1)$.

Упражнение 3.2.7. Сформулируйте и докажите теорему Безу для кривых с простыми самопересечениями.

С другой стороны, каждая из двойных точек является общим нулем кривой $f = 0$ и кривой $\partial f/\partial y = 0$, поэтому точками ветвления проекции на ось x (т.е. точками с вертикальными касательными) являются лишь те точки пересечения, которые отличны от двойных точек. Их число равно $d(d-1)-2\delta$ (каждая точка пересечения считается два раза, поскольку в ней кривая $\partial f/\partial y = 0$ пересекает две ветви погруженной кривой). По формуле Римана– Гурвица имеем

$$d(d-1) - 2\delta = 2d + 2g - 2,$$

откуда

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta.$$

Упражнение 3.2.8. Найдите размерность пространства плоских кривых степени 4 с одной простой двойной точкой.

Упражнение 3.2.9. Докажите, что всякая кривая рода два допускает погружение в проективную плоскость в качестве кривой степени 4 с одной простой двойной точкой.

Упражнение 3.2.10. Оцените степень плоских кривых (с двойными точками), необходимую для того, чтобы представить любую кривую заданного рода g.

Отображение $C \to C'$, где C — гладкая кривая, а C' — плоская кривая, у которой могут быть простые точки самопересечения, причем число этих точек конечно, называют отображением *нормализации*, а кривую C называют *нормализацией* кривой C'. В действительности нормализация есть у любой плоской кривой, вне зависимости от того, какие у нее особенности, но нам этот факт не понадобится.

В ситуации общего положения проекция кривой C в $\mathbb{CP}^n$ на кривую C' в $\mathbb{CP}^m$, $m < n$, представляет собой бирациональный изоморфизм, т. е. если точка $(x_0 : \cdots : x_n) \in C$ переходит в точку $(y_0 : \cdots : y_m) \in C'$, то координаты $x_0, \ldots, x_n$ рационально выражаются через $y_0, \ldots, y_m$, а $y_0, \ldots, y_m$ рационально выражаются через $x_0, \ldots, x_n$. Прежде всего заметим, что координаты можно выбрать так, чтобы проекция имела вид

$$(x_0 : \cdots : x_n) \mapsto (x_0 : \cdots : x_m).$$

Поэтому нужно лишь проверить, что $x_{m+1}, \ldots, x_n$ рационально выражаются через $x_0, \ldots, x_m$ (для точек кривой C). Пусть кривая C задается системой уравнений $f_i(x_0, \ldots, x_n) = 0$, $i = 1, \ldots, r$. Для точки $(a_0 : \cdots :$

$a_m) \in C$ получаем систему уравнений $f_i(a_0, \ldots, a_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = 0$, $i = 1, \ldots, r$. Каждой точке кривой C' соответствует одна точка кривой C, поэтому $x_{m+1}, \ldots, x_n$ однозначно выражаются через $a_0, \ldots, a_m$. Следовательно, $x_{m+1}(a_0, \ldots, a_m), \ldots, x_n(a_0, \ldots, a_m)$ — однозначные алгебраические функции. Но алгебраическая функция однозначна лишь в том случае, когда она рациональна.

Упражнение 3.2.11. Изучите особые точки плоской кривой, заданной уравнением

$$y^2z^2 - x^2(z^2 - x^2) = 0,$$

и постройте ее нормализацию.

3.3 Мероморфные функции на кривых в проективных пространствах

Пусть C — кривая, вложенная в проективное пространство $\mathbb{CP}^n$, $n \geq 2$, с координатами $(z_0 : z_1 : \cdots : z_n)$. Пусть $P_k(z_0, \ldots, z_n)$ и $Q_k(z_0, \ldots, z_n)$ — два однородных многочлена степени k. Предположим, что многочлены P_k и Q_k не имеют общих множителей и что ограничение многочлена Q_k на кривую C не обращается тождественно в 0. Тогда ограничение $\frac{P_k}{Q_k}|_C$ отношения этих многочленов на кривую C является мероморфной функцией на этой кривой. Более того, всякая мероморфная функция на данной кривой реализуется таким образом, если подобрать подходящее вложение и подходящую пару многочленов.

Упражнение 3.3.1. Вычислите степень мероморфной функции, являющейся ограничением на плоскую кривую степени d несократимой рациональной функции $\frac{P_k}{Q_k}$ с однородными числителем и знаменателем степени k.

Глава 17

Взгляд назад с точки зрения характеристических классов

Введение характеристических классов позволяет по-новому посмотреть на многие ранее проведенные вычисления и упростить их вывод.

17.1 Род полного пересечения