# Листок 3. Операторы.

Все задачи в этом листке, кроме отмеченных звездочкой, являются обязательными.
Крайний срок сдачи письменных решений — **17 ноября**.

---

1. Пусть $A$, $B$ и $C$ — линейные самосопряженные операторы в $\mathbb{C}^n$. Известно, что $[A,C]=[B,C]=0$, но $[A,B]\not\equiv 0$. Докажите, что среди собственных значений оператора $C$ обязательно найдутся кратные.

2. Рассмотрим линейный оператор $A$ в $\mathbb{C}^n$, обладающий полным набором собственных векторов, все собственные значения которого различны:
$$A\psi_i=\lambda_i\psi_i,\ 1\le i\le n,\quad i\neq j\ \Rightarrow \lambda_i\neq\lambda_j.$$
Выразите проектор $P_i$ на направление собственного вектора $\psi_i$ в виде функции от $A$.

3. Придумайте примеры наблюдаемых $A$ и $B$, а также состояния $\sigma$, со следующими свойствами:
   (a) Состояние $\sigma$ смешанное, дисперсия наблюдаемой $A$ в этом состоянии равна нулю: $\Delta_\sigma A=0$.
   (b) Наблюдаемые $A$ и $B$ задаются коммутирующими операторами, причем их дисперсии в состоянии $\sigma$: $\Delta_\sigma A=0$, $\Delta_\sigma B\neq 0$ (состояние $\sigma$ не обязательно смешанное).
   (c) Наблюдаемые $A$ и $B$ задаются некоммутирующими операторами, но в состоянии $\sigma$: $\Delta_\sigma A=0$, $\Delta_\sigma B=0$.

4. Наблюдаемая $A$ является интегралом движения, т.е. коммутирует с гамильтонианом квантовомеханической системы. Докажите, что среднее значение, дисперсия и, вообще говоря, произвольная функция этой наблюдаемой в любом состоянии системы не зависят от времени.

5. Пусть $a$ и $a^\dagger$ — пара эрмитово сопряженных друг другу линейных операторов в унитарном пространстве $V$ (пространство с положительно определенным эрмитовым скалярным произведением). Докажите, что для них не может выполняться перестановочное соотношение $a\,a^\dagger+a^\dagger a=-I$, где $I$ — тождественный оператор.

6. Операторы $Q$ и $P$ получены в результате канонического квантования $\left(\{\cdot,\cdot\}\mapsto \frac{1}{i\hbar}[\cdot,\cdot]\right)$ классических обобщенной координаты $q$ и соответствующего ей импульса $p$.
   (a) Упростите выражение $e^{-\alpha P}\,f(Q)\,e^{\alpha P}$. Здесь $\alpha\in\mathbb{C}$ – параметр, а $f$ – гладкая функция.
   Найдите перестановочное соотношение для операторов $u=e^{Q}$ и $v=e^{\alpha P}$. Сравните результат с перестановочным соотношением, которое получится, если наивно провести процедуру канонического квантования для пары $e^q$, $e^{\alpha p}$.
   (b) **(*)** Докажите соотношение $e^{\alpha(P+Q)}=e^{\alpha P}\,e^{\alpha Q}\,e^{i\hbar\frac{\alpha^2}{2}}$. (*Указание.* Составьте дифференциальное уравнение для операторнозначной функции $F(\alpha)=e^{-\alpha P}e^{\alpha(P+Q)}$.)

7. **(*)** Докажите формулу Бейкера-Хаусдорфа

$$e^A B e^{-A} = B + \frac{1}{1!}\,[A,B] + \frac{1}{2!}\,[A,[A,B]] + \dots\,,$$

где $A$ и $B$ — операторы, действующие в конечномерном пространстве. (*Указание.* Составьте дифференциальное уравнение для операторнозначной функции $F(\alpha) = e^{\alpha A} B e^{-\alpha A}$.)

8. Множество комплекснозначных функций на вещественной прямой с интегрируемым квадратом модуля $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx < \infty$ обозначается символом $L_2(\mathbb{R})$. Докажите, что $L_2(\mathbb{R})$ является линейным пространством.

   На $L_2(\mathbb{R})$ зададим линейный оператор $D_c$:

$$D_c\psi(x) = \sqrt{c}\,\psi(cx), \quad c > 0, \quad \forall\,\psi(x) \in L_2(\mathbb{R}).$$

   Найдите сопряженный оператор $D_c^\dagger$ относительно эрмитова скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_{L_2}$ в $L_2(\mathbb{R})$:

$$(\psi_1, \psi_2)_{L_2} = \int_{\mathbb{R}} \psi_1^*(x)\psi_2(x)dx.$$

9. Линейный оператор на пространстве квадратично интегрируемых функций $L_2(\mathbb{R})$ называется ядерным, если его действие на произвольную функцию $\psi(x) \in L_2(\mathbb{R})$ определяется формулой

$$F\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\psi(y)dy,$$

   где $f(x,y)$ — некоторая заданная функция, называемая ядром оператора $F$.

   Рассмотрим ядерный оператор $\Phi$ с ядром $\phi(x)\phi^*(y)$, где $\phi(x) \in L_2(\mathbb{R})$. Докажите, что областью определения $\Phi$ является все пространство $L_2(\mathbb{R})$. Найдите собственные значения и собственные функции этого оператора.