Глава 2

Комплексная структура и топология кривых

Всякая комплексная алгебраическая кривая является двумерной ориентированной поверхностью. Как мы уже знаем, топология таких поверхностей очень проста — если поверхность компактна, то ее топология однозначно определяется ее родом (или, эквивалентно, ее эйлеровой характеристикой). Однако помимо топологической структуры на кривой есть комплексная структура. Она выделяет из всех возможных функций на кривой аналитические функции.

Если поверхность устроена просто — например, представляет собой диск или сферу, — то любые две комплексные структуры на ней эквивалентны. Если же род поверхности положителен, то на ней можно ввести уже много различных комплексных структур. Более того, различные комплексные структуры на поверхностях данного рода сами образуют пространство. Геометрия этих пространств усложняется с ростом рода. Мы будем изучать ее простейшие свойства на протяжении всего курса.

2.1 Комплексная структура на кривой

Гладкая кривая в n-мерном проективном пространстве локально задается системой из $n-1$ полиномиальных уравнений, поэтому, по теореме о неявной функции, можно отождествить окрестность каждой точки такой кривой с единичным диском в $\mathbb{C}^1$. Тем самым, для каждой точки A такой кривой C имеется взаимно однозначное отображение m_U из некоторой окрестности $U = U(A) \subset C$ этой точки на единичный диск. Разумеется, таких окрестностей и таких отображений много. Такое отображение называется *локальной координатой* в выбранной окрестности[1]. При этом если

[1] Иногда в определении локальной координаты требуют, чтобы точка A отображалась в центр диска.

две такие окрестности U, V пересекаются, то отображение $m_U m_V^{-1}$, определенное в некоторой области единичного диска, оказывается ***голоморфным***, т.е. комплексно-аналитическим и обратимым, причем обратное к нему тоже комплексно аналитическое. Такой набор окрестностей и локальных координат называют ***комплексной структурой*** на кривой.

Понятие комплексной структуры позволяет ввести и понятие голоморфного отображения комплексных кривых. Отображение $f : C \to C'$ комплексных кривых, наделенных комплексными структурами $\{(U, m_U)\}$ и $\{(U', m_{U'})\}$ соответственно, называют ***голоморфным***, если для любой точки $A \in C$ существует окрестность $U' \subset C'$ точки $f(A')$ вместе с отображением $m'_{U'} : U' \to \mathbb{C}$ и окрестность U точки A вместе с отображением $m_U : U \to \mathbb{C}$, такие, что отображение $m'_{U'} f m_U^{-1}$ голоморфно там, где оно определено (область его определения $m_U(f^{-1}(U') \cap U)$ открыта и содержит точку $m_U(A)$, поэтому она заведомо непуста). Ясно, что если указанное сквозное отображение $f_u = m'_{U'} f m_U^{-1}$ голоморфно для некоторой пары окрестностей U, U' и локальных координат $m_U, m'_{U'}$, то для любой другой пары окрестностей V, V' и локальных координат $m_V, m'_{V'}$ отображение $f_v = m'_{V'} f m_V^{-1}$ голоморфно на множестве $m_V(f^{-1}(U' \cap V') \cap U \cap V)$. Действительно, $f_v = m'_{V'} {m'_{U'}}^{-1} f_u m_U^{-1} m_V^{-1}$.

Пример 2.1.1. Множество прямых, проходящих через заданную точку проективной плоскости, образует проективную прямую. Поэтому, зафиксировав в $\mathbb{CP}^2$ точку A, мы можем построить отображение из произвольной плоской кривой C в проективную прямую: нужно каждой точке кривой C сопоставить прямую, проходящую через точку A и выбранную точку кривой. Докажите, что это отображение голоморфно.

Взаимно однозначное голоморфное отображение пары кривых, для которого обратное к нему тоже голоморфно, называют *биголоморфным* отображением, или *изоморфизмом* кривых.

Наличие комплексной структуры можно принять за определение комплексной кривой. *Римановой поверхностью* называется двумерная ориентируемая поверхность с комплексной структурой на ней. Всякая гладкая комплексная кривая в проективном пространстве, а также любое ее открытое подмножество, является римановой поверхностью. Оказывается, что этим все римановы поверхности исчерпываются — любая риманова поверхность реализуется как открытое подмножество гладкой проективной кривой. Однако доказать это утверждение непросто. Для его доказательства необходимо показать, что на любой римановой поверхности существует достаточно много мероморфных функций (что позволяет построить ее вложение в проективное пространство). Мы не будем доказывать эту теорему — можно считать, что мы рассматриваем лишь римановы поверхности, допускающие проективное вложение.

2.2 Род гладкой плоской кривой

Неособая алгебраическая кривая в $\mathbb{CP}^2$ является римановой поверхностью. Комплексная структура задает ориентацию на этой поверхности — умножение на мнимую единицу i в произвольной локальной координате определяет положительное направление поворота в окрестности каждой точки. Всякая гладкая алгебраическая кривая компактна, поскольку является замкнутым подмножеством в компактном пространстве. С топологической точки зрения кривая в $\mathbb{CP}^2$ представляет собой поверхность некоторого рода g, т.е. сферу с g ручками.

Для вычисления рода кривой и для исследования некоторых других свойств кривой бывает полезно рассмотреть проекцию плоскости $\mathbb{CP}^2$ на $\mathbb{CP}^1$ и индуцированное этой проекцией отображение кривой $C \subset \mathbb{CP}^2$ на $\mathbb{CP}^1$. Под проекцией мы подразумеваем обычную проекцию плоскости на прямую. Примером такой проекции может служить отображение $(x : y : z) \mapsto (x : y)$; это отображение определено на дополнении к точке $(0 : 0 : 1) \in \mathbb{CP}^2$. При проектировании плоскости $\mathbb{CP}^2$ (с выколотой точкой) на $\mathbb{CP}^1$ прообразом точки служит прямая. Как правило, прямая в $\mathbb{CP}^2$ пересекает кривую C степени n ровно в n точках. Поэтому у всех точек прямой $\mathbb{CP}^1$ кроме конечного числа прообраз при проекции кривой $C \subset \mathbb{CP}^2$ на $\mathbb{CP}^1$ состоит ровно из n точек. Если мы не будем рассматривать проекции вдоль прямых, являющихся компонентами кривой C, или будем рассматривать только неприводимые кривые степени выше 1, то прообраз любой точки будет содержать не более n точек. С топологической точки зрения отображение $p : C \to \mathbb{CP}^1$ является разветвленным накрытием. Точки прямой $\mathbb{CP}^1$, прообразы которых содержат менее n точек, это точки ветвления накрытия.

Мы установили, что любая плоская кривая разветвленно накрывает проективную прямую. Последняя получается в результате добавления к одномерному комплексному пространству $\mathbb{C}$ бесконечно удаленной точки, т.е. гомеоморфна сфере S^2. Тем самым мы еще раз доказали, что любая алгебраическая кривая C в $\mathbb{CP}^2$ представляет собой ориентируемую поверхность.

Изучение разветвленного накрытия позволяет подсчитать род кривой.

Пример 2.2.1. Кривая Ферма $x^n + y^n + z^n = 0$ имеет род $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Доказательство. Заметим сначала, что рассматриваемая кривая C неособая. Кроме того, проекция $p : \mathbb{CP}^2 \setminus (0 : 0 : 1) \to \mathbb{CP}^1$ индуцирует отображение $p' : C \to \mathbb{CP}^1$, так как $(0 : 0 : 1) \notin C$. Прообраз точки $(x_0 : y_0) \in \mathbb{CP}^1$ состоит из точек $(x_0 : y_0 : z) \in \mathbb{CP}$, где $z^n = -(x_0^n + y_0^n)$. Если $x_0^n + y_0^n \neq 0$, то прообраз состоит ровно из n точек, а если $x_0^n + y_0^n = 0$, то прообраз состоит из одной точки. Поэтому p' — n-листное разветвленное накрытие с точками ветвления $(1 : \varepsilon_n)$, где ε_n — корень n-й степени из -1. Их n штук, и порядок ветвления в каждой из них равен n. Из теоремы Римана–Гурвица получаем

$$\chi(C) = n\left(\chi(S^2) - n\right) + n = n(2 - n) + n = -n^2 + 3n.$$

Поэтому

$$g(C) = \frac{2 - \chi(C)}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

□

Упражнение 2.2.2. Определим отображение кривой Ферма в $\mathbb{CP}^1$, положив в карте $z = 1$ значение этого отображения равным n-й степени координаты x точки кривой. а) Докажите, что построенное отображение достраивается до голоморфного отображения из кривой Ферма в $\mathbb{CP}^1$. б) Найдите точки ветвления этого отображения и порядки ветвления в их прообразах. в) Докажите, что прообраз вещественной прямой относительно этого отображения является полным трехдольным графом $K_{n,n,n}$ (вершины графа — прообразы критических значений, ребра — прообразы соединяющих их вещественных отрезков).

Замечание 2.2.3. Эта конструкция дает вложение графа $K_{n,n,n}$ в поверхность минимально возможного рода.

Приведенный пример является частным случаем следующего более общего утверждения.

Теорема 2.2.4. *Род неособой плоской кривой степени n равен* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

В частности, род кривой степени 3 равен 1, род кривой степени 4 равен 3, а род кривой степени 5 равен 6.

Первое доказательство. Пусть $F(x, y, z) = 0$ — уравнение неособой кривой $C \subset \mathbb{CP}^2$ степени n. Можно считать, что точка $(0 : 0 : 1)$ не лежит на кривой C. Тогда можно рассмотреть проекцию $p : C \to \mathbb{CP}^1$, переводящую точку $(x : y : z)$ в точку $(x : y)$. Прообраз точки $(x_0 : y_0)$ состоит из точек $(x_0 : y_0 : z)$, где z — корень многочлена $P(z) = F(x_0, y_0, z)$. Точкам ветвления соответствуют кратные корни этого многочлена, т. е. точки пересечения кривых $F = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$. Степени этих кривых равны n и $n - 1$ соответственно.

Рассмотрим сначала случай, когда точки пересечения этих кривых некратные, т. е. количество точек пересечения равно $n(n-1)$. В таком случае прообраз каждой точки ветвления состоит ровно из $n - 1$ точек, поэтому

$$\chi = n(2 - n(n-1)) + n(n-1)^2 = 2n - n(n-1) = 3n - n^2,$$

а значит,

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Предположим теперь, что есть и кратные точки пересечения. Напомним, что

$$\chi(C) = n(2 - k) + n_1 + \ldots + n_k = 2n - \sum_{i=1}^{k}(n - n_i).$$

Для некратных точек пересечения $n - n_i = 1$. А когда d некратных точек пересечения сливаются в одну точку кратности d, вместо d слагаемых $n - n_i = 1$ появляется одно слагаемое, равное d. Сама сумма при этом не изменяется. $\triangleleft$

Второе доказательство. Сопоставив кривой степени n коэффициенты задающего ее уравнения (с точностью до пропорциональности), множество всех кривых степени n можно отождествить с $\mathbb{CP}^d$, где $d = \frac{n(n+3)}{2}$.

Рис. 2.1: Гладкая кривая, близкая к четверке прямых

Кривая $F = 0$ особая, если система уравнений $F = 0, F_x = 0, F_y = 0, F_z = 0$ имеет ненулевое решение. В этой системе уравнение $F = 0$ лишнее, так как $nF = xF_x + yF_y + zF_z$. Из трех уравнений $F_x = 0, F_y = 0, F_z = 0$ можно исключить x, y и z. В результате получим алгебраическое уравнение относительно коэффициентов функции F. Таким образом, особые кривые принадлежат множеству комплексной коразмерности 1, т. е. вещественной коразмерности 2. Это множество не разбивает $\mathbb{CP}^d$, и, значит, неособые кривые образуют связное множество. При малом шевелении неособой кривой ее род не может измениться, поэтому у всех неособых кривых степени n род один и тот же.

Теперь можно было бы воспользоваться примером 2.2.1, в котором вычислен род одной из неособых кривых степени n. Но можно вычислить и род какой-нибудь другой неособой кривой степени n, например, кривой $l_1 \cdot \ldots \cdot l_n = \varepsilon$, где $l_1, \ldots, l_n$ — прямые общего положения, ε — достаточно малое число. Кривая $l_i = 0$ представляет собой сферу $S^2 \subset \mathbb{CP}^2$, а кривая $l_1 \cdot l_2 \cdot \ldots \cdot l_n = 0$ есть объединение таких сфер, попарно пересекающихся по одной точке. Для кривой $l_1 \cdot \ldots \cdot l_n = \varepsilon$ точка пересечения двух прямых заменяется трубочкой, соединяющей соответствующие этим прямым сферы. Таким образом, рассматриваемая кривая представляет собой n сфер, попарно соединенных трубочками (см. рис. 2.1 для $n = 4$). Кривая степени n получается из кривой степени $n-1$ добавлением $n-2$ ручек, причем род кривой степени 1 равен 0. Поэтому род кривой степени n равен

$$1 + 2 + \ldots + (n-2) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \quad \triangleleft$$

Упражнение 2.2.5. Пусть Y — плоская кривая, заданная в карте $z = 1$ уравнением $y^2 = x - x^3$. а) Нарисуйте вещественную часть этой кривой. б) Найдите точки ветвления проекции этой кривой на ось x и на ось y и порядки ветвления в их прообразах.

Упражнение 2.2.6. Пусть Y — кривая общего положения в $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$, проекция которой на первый сомножитель имеет степень m, а на второй — степень n. Найдите род кривой Y.

Теорема 2.2.4 позволяет дать еще одно доказательство теоремы 1.3.3 о числе двойных точек неприводимой кривой данной степени. Действительно, гладкая кривая степени n представляет собой двумерную ориентируемую поверхность рода $(n-1)(n-2)/2$. Появление двойной точки у продеформированной кривой приводит к стягиванию в точку нетривиальной петли у поверхности, см. рис. 2.2 а). Локально окрестность особой точки выглядит как трансверсальное пересечение двух двумерных плоскостей в четырехмерном пространстве. Отделив друг от друга листы в точке пересечения, мы получим новую поверхность. Неприводимость особой кривой эквива-

Рис. 2.2: а) Стягивание петли в особую точку и б) неприводимая кривая с максимально возможным числом двойных точек

Рис. 2.3: Проектирование кубической кривой из точки. Две из шести касательных лежат в комплексной области и на рисунке не изображены

лентна связности получившейся поверхности. Если она связна, то ее род на единицу меньше рода исходной поверхности.

Таким образом, возможное число двойных точек не превосходит рода кривой — появление каждой дополнительной двойной точки уменьшает род поверхности на 1. Если число двойных точек в точности равно роду (рис. 2.2 б)), то результат расщепления их всех представляет собой сферу, т.е. особая кривая допускает рациональную параметризацию, см. теорему 1.3.4.

Немного изменив проекцию, можно с помощью формулы Римана–Гурвица найти количество касательных к данной кривой C, проходящих через данную точку O.

Теорема 2.2.7. *Из точки общего положения можно провести ровно n^2-n различных касательных к неособой кривой степени n.*

Доказательство. По сути дела, мы уже доказали это утверждение в примере 2.2.4. Рассмотрим проекцию p кривой C на проективную прямую $\mathbb{CP}^1$, образованную прямыми, проходящими через точку O. Отображение p является разветвленным накрытием. Касательные к кривой C, проходящие через точку O, соответствуют точкам ветвления (рис. 2.3). Предположим, что C — неособая кривая степени n, а точка O не лежит ни на кривой C, ни на двойных касательных, ни на касательных в точках перегиба. (*Двойной касательной* называют прямую, касающуюся кривой C в двух различных точках.) Тогда для всех точек ветвления $n-n_i=1$, поэтому

$$\chi(C)=2n-\sum_{i=1}^{k}(n-n_i)=2n-k,$$

где k — количество точек ветвления. В нашем случае $\chi(C)=3n-n^2$, поэтому $k=n^2-n$. □

Следствие 2.2.8. *Из точки общего положения, лежащей на неособой кривой C степени n, можно провести ровно n^2-n-1 различных касательных к кривой C.*

Доказательство. При стремлении точки O к точке O_1, лежащей на кривой C, две касательные, проходящие через точку O, сливаются в одну (рис. 2.4). □

Для точки O, лежащей на кривой C, одной из n^2-n-1 касательных будет касательная к кривой в точке O. Если эту касательную исключить, то

Рис. 2.4: Две касательные, сливающиеся в одну

останется $n^2 - n - 2$ касательных. Особенно интересна ситуация с этими касательными в случае кубических кривых. В этом случае $n^2 - n - 2 = 4$. Двойных касательных у кубической кривой нет — степень пересечения двойной касательной с кривой не меньше 4, тогда как степень пересечения прямой с кубической кривой не может превышать 3. Поэтому точками необщего положения будут только точки перегиба (точку кривой называют *точкой перегиба*, если кратность пересечения кривой и касательной в этой точке больше 2). Но в этих точках не происходит ничего плохого — просто одна из четырех касательных совпадает с касательной в этой точке. Таким образом, через каждую точку кубической кривой проходит четверка попарно различных касательных к ней (которые во всех точках, не являющихся точками перегиба, отличны от касательной в самой этой точке).

Эта четверка прямых определяет четыре точки проективной прямой, образованной всеми прямыми, проходящими через данную точку. Для четверки точек проективной прямой можно рассмотреть их *двойное отношение* $[a, b, c, d] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$, где a, b, c и d — координаты этих точек в некоторой координате на прямой (от выбора координаты это число не зависит). Двойное отношение зависит от порядка, в котором берутся точки.

Упражнение 2.2.9. а) Докажите, что $[a, b, c, d] = [b, a, c, d]^{-1} = [a, b, d, c]^{-1}$.
б) Докажите, что $[a, b, c, d] = 1 - [a, c, b, d]$.
в) Докажите, что переставляя четыре числа a, b, c, d мы не можем получить больше 6 различных значений их двойного отношения и приведите примеры четверок, для которых число различных отношений равно $1, 2, 3$ и 6.

Упражнение 2.2.10. а) Докажите, что функция комплексного переменного λ

$$J(\lambda) = \frac{(1 - \lambda + \lambda^2)^3}{\lambda^2(1 - \lambda)^2}$$

не изменяется при заменах λ на λ^{-1} и на $1 - \lambda$.
б) Докажите, что если $\lambda = [a, b, c, d]$ — двойное отношение четырех точек, то $J(\lambda)$ не зависит от порядка, в котором берутся точки.

Пусть x — точка кубической кривой, $\lambda(x)$ — двойное отношение четырех касательных, проведенных из точки x. Эти касательные всегда попарно различны, поэтому $\lambda(x)$ не принимает значений 0, 1 и ∞. Это означает, что $J(\lambda(x))$ — однозначная функция, не принимающая значение ∞, т. е. ограниченная функция. Но кубическая кривая C в $\mathbb{CP}^2$ компактна, а ограниченная мероморфная функция на компактной поверхности без края постоянна. Поэтому $J(\lambda(X)) = J(C)$ — инвариант точки на кривой C. По некоторым причинам вместо инварианта J удобнее рассматривать инвариант $j = 2^8 J$.

При проективном преобразовании плоскости прямые, касательные к данной кривой C, переходят в касательные прямые к ее образу. Четверка касательных из данной точки на кривой также претерпевает проективное пре-

Рис. 2.5: Простая точка перегиба кривой

образование, а значит их двойное отношение остается неизменным. Тем самым, значение $J(C)$ является проективным инвариантом кубической кривой. Как мы увидим впоследствии, это означает, что оно является и биголоморфным инвариантом.

Упражнение 2.2.11. Докажите, что для кривой C, заданной в аффинной карте $z = 1$ уравнением $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$, инвариант $J(C)$ равен $J(\lambda)$.

Это упражнение означает, что существуют различные кубические кривые — если $J(\lambda_1) \neq J(\lambda_2)$, то кривые $y^2 = x(x-1)(x-\lambda_1)$ и $y^2 = x(x-1)(x-\lambda_2)$ не могут быть проективно эквивалентны и биголоморфны друг другу.

2.3 Гессиан и точки перегиба

Пусть A — гладкая точка кривой C, заданной однородным уравнением $F(x,y,z) = 0$. Ограничение функции F на касательную прямую $A + tP$ к C, проведенную в точке A, имеет нуль порядка не ниже 2. Для кривой C, не содержащих прямой в качестве неприводимой компоненты, этот порядок в точности равен 2 для всех точек кроме конечного числа. Точки, в которых порядок нуля больше 2, называются ***точками перегиба*** кривой C. Точка перегиба называется ***простой***, если порядок нуля ограничения уравнения кривой на касательную в этой точке равен 3, см. рис. 2.5.

Для нахождения точек перегиба кривой используется гессиан задающего ее многочлена. ***Гессианом*** однородного многочлена называется определитель матрицы его вторых частных производных:

$$H(F) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{vmatrix}.$$

Упражнение 2.3.1. Докажите, что точка кривой является точкой перегиба в том и только в том случае, если гессиан многочлена, задающего кривую, обращается в нуль в этой точке.

Это упражнение позволяет подсчитать количество точек перегиба у кривой данной степени. Приравнивание к нулю гессиана многочлена F задает на плоскости новую алгебраическую кривую, и точки перегиба исходной кривой C это в точности точки пересечения кривой C с кривой $H(F) = 0$. Количество точек пересечения — в предположении, что пересечение трансверсально, — можно теперь подсчитать по формуле Безу. Например, если степень многочлена F равна 3, то степень его гессиана также равна 3 (вторые производные кубического многочлена имеют степень 1, поэтому степень составленного из них определителя третьего порядка равна 3). Значит, у кубической кривой 9 точек перегиба. К сожалению, вещественными могут быть лишь не более 3 из этих точек, поэтому вещественных кубических кривых с 9 точками перегиба не бывает и мы не можем изобразить все точки перегиба кубики на рисунке.

Упражнение 2.3.2. Вычислите количество точек перегиба у кривой степени n в предположении, что все точки перегиба простые. В частности, докажите, что у квадрик точек перегиба нет.

Как показывают нижеследующие упражнения, 9 точек перегиба кубической кривой образуют очень интересную конфигурацию точек на комплексной проективной плоскости.

Упражнение 2.3.3. Докажите, что третья точка пересечения прямой, соединяющей две точки перегиба кубической кривой, с этой кривой также является ее точкой перегиба. Найдите общее число прямых, каждая из которых содержит тройку точек перегиба данной кубической кривой. Сколько из этих прямых проходят через данную точку перегиба?

Упражнение 2.3.4. Докажите, что точки перегиба у всех кубик из пучка $\lambda F + \mu H(F) = 0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, совпадают.

Упражнение 2.3.5. Докажите, что при подходящей проективной замене координат любой пучок вида $\lambda F + \mu H(F) = 0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, содержащий гладкую кубику, можно перевести в пучок кривой Ферма $\lambda(x^3 + y^3 + z^3) + \mu xyz = 0$. В частности, все наборы из девяти точек перегиба данной кубической кривой проективно эквивалентны. Вычислите точки перегиба для кривых этого пучка.

2.4 Гиперэллиптические кривые

Пусть $P_n = P_n(x)$ —многочлен степени n без кратных корней. Рассмотрим плоскую кривую, заданную в аффинной карте $z = 1$ уравнением $y^2 = P_n(x)$. В выбранной аффинной карте у кривой нет особых точек. Однако при $n > 4$ у этой кривой есть особые точки на бесконечности.

Упражнение 2.4.1. Проверьте, что указанная кривая имеет на бесконечности одну точку, если число n нечетно, и две точки, если оно четно. В обоих случаях точки на бесконечности особы при $n > 4$.

Аффинная часть кривой $y^2 = P_n(x)$ представляет собой результат прокалывания гладкой компактной кривой в одной точке, если число n нечетно, и в двух точках, если число n четно. Заклеив эти точки, исходную гладкую кривую можно восстановить.

Чтобы найти прообраз точки с координатой x_0 из $\mathbb{CP}^1$, нужно решить уравнение $y^2 = P_n(x_0)$. Если x_0 — не корень многочлена P_n, то это уравнение имеет ровно два корня. Поэтому точками ветвления являются корни многочлена P_n и, возможно, точка $(1:0)$. Проверим, что точка $(1:0)$ будет точкой ветвления тогда и только тогда, когда n нечетно. При малых z прообраз точки $(1:z)$ состоит из точек вида $(1, y, z)$, где $y^2 \approx a_n z^{2-n}$.

Пусть $z = \rho e^{i\varphi}$. При изменении φ от 0 до 2π (т. е. при обходе вокруг точки $(1,0) \in \mathbb{CP}^1$) аргумент точки y изменяется на $(2-n)\pi$. Поэтому если n нечетно, то y изменяет знак, т. е. мы переходим на другую ветвь, а если n четно, то y не изменяется, т. е. мы возвращаемся на исходную ветвь.

Таким образом, количество точек ветвления равно $2\left[\frac{n+1}{2}\right]$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа. Поэтому согласно теореме Римана–Гурвица

$$2-2g = 2\left(2-2\left[\frac{n+1}{2}\right]\right) + 2\left[\frac{n+1}{2}\right],$$

т. е. $g = \left[\frac{n+1}{2}\right] - 1 = \left[\frac{n-1}{2}\right]$.

Замечание 2.4.2. Для вычисления рода гиперэллиптической кривой мы не можем воспользоваться напрямую формулой для вычисления рода по степени кривой. Действительно, эта формула действует лишь для гладких кривых на проективной плоскости. Но на проективной плоскости эллиптическая кривая негладкая, а на произведении двух проективных прямых формула неприменима.

Кривую C, заданную уравнением $y^2 = P_n(x)$, называют *гиперэллиптической*.

Более общим образом, риманова поверхность называется *гиперэллиптической*, если ее род больше 1 и ею можно двулистно разветвленно накрыть сферу Римана. Все точки ветвления двулистного накрытия обязательно простые. По формуле Римана–Гурвица, их число четно, и если оно равно $2k$, то род накрывающей поверхности равен $g = k-1$. Позднее мы увидим, что всякую гиперэллиптическую риманову поверхность можно задать уравнением $y^2 = P_n(x)$, где $n = 2g+1$ или $n = 2g+2$, в произведении двух проективных прямых, хотя и не единственным образом. На гиперэллиптической кривой можно определить так называемую *гиперэллиптическую инволюцию* $\sigma\colon C \to C$, переставляющую листы разветвленного накрытия. (Вообще, *инволюция* это произвольное преобразование, квадрат которого является тождественным преобразованием.) Для гиперэллиптической кривой, заданной уравнением $y^2 = P_n(x)$ в прямом произведении двух проективных прямых, эта инволюция представляет собой ограничение на кривую инволюции объемлющей поверхности, которая в координатах имеет вид $(x,y) \mapsto (x,-y)$.

Упражнение 2.4.3. Докажите, что на гиперэллиптической кривой гиперэллиптическая инволюция единственна — все двулистные разветвленные накрытия сферы Римана данной кривой задают одну и ту же инволюцию.

Замечание 2.4.4. Не следует путать гиперэллиптическую инволюцию с инволюцией комплексного сопряжения. Последняя определена на вещественных кривых, т.е. на кривых, задаваемых полиномиальными уравнениями с вещественными коэффициентами. В отличие от гиперэллиптической, вещественная инволюция не сохраняет комплексной структуры кривой и не является, тем самым, голоморфным отображением.

2.5 Поднятие комплексной структуры

Пусть у нас есть какая-нибудь комплексная кривая C, Y — двумерная поверхность и $f : Y \to C$ — накрытие. Тогда мы можем "поднять" комплексную структуру с кривой C на Y. Делается это так. Возьмем точку $y \in Y$ и ее образ $t = f(y)$ при накрытии f. У точки $t \in C$ есть такая окрестность $U = U(t)$, что ограничение накрывающего отображения на связную компоненту прообраза $f^{-1}(U)$, содержащую y, взаимно однозначно. Комплексная координата на такой окрестности вводится как композиция $m_U \circ f$ (если окрестность U не входит в число окрестностей, задающих комплексную структуру, то нужно взять какую-нибудь определяющую окрестность и ограничить координатное отображение с нее на ее пересечение с U, считая это пересечение новой координатной окрестностью).

Упражнение 2.5.1. Проверьте, что так определенные локальные координаты действительно задают комплексную структуру на Y. Это означает, что на пересечении определяющих окрестностей замены локальных координат голоморфны.

Накрытия комплексных кривых встречаются редко, поэтому принципиально важной является возможность распространить предыдущую конструкцию на случай разветвленных накрытий. Для этого нужно научиться продолжать комплексную структуру в окрестности прообразов точек ветвления. Пусть $f : Y \to X$ — разветвленной накрытие гладкой неприводимой комплексной кривой X поверхностью Y и пусть $y \in Y$ — прообраз точки ветвления $f(y) = x$. Тогда у точки y есть проколотая круговая окрестность, которая накрывает проколотую окрестность точки x с некоторой кратностью k (эта кратность называется ***порядком ветвления***, в данной точке прообраза). Выбрав координату z в окрестности точки $x \in X$, мы можем ввести на накрывающей проколотой окрестности точки y координату $t = z^{1/k}$, которая, как нетрудно видеть, продолжается в точку, заклеивающую прокол. В локальной координате t наше разветвленное накрытие имеет вид $t \mapsto t^k$. Как мы увидим, всякую гладкую компактную комплексную кривую можно получить как разветвленное накрытие проективной прямой $\mathbb{CP}^1$.

Таким образом, мы получили еще один, чрезвычайно мощный, инструмент построения комплексных кривых. Чтобы построить кривую, нужно взять на комплексной проективной прямой набор точек, построить звезду с лучами, идущими в эти точки (звезда задается с точностью до гомотопической эквивалентности) и задаться набором перестановок множества из d элементов, обладающим двумя свойствами — транзитивностью задаваемого ими действия и тем, что их произведение равно тождественной перестановке. Такой набор задает разветвленное накрытие сферы (см. раздел 0.5), и подняв комплексную структуру со сферы на накрывающую поверхность, мы превратим ее в риманову поверхность. Топология этой римановой поверхности определяется набором перестановок, а комплексная структура — расположением вершин звезды.

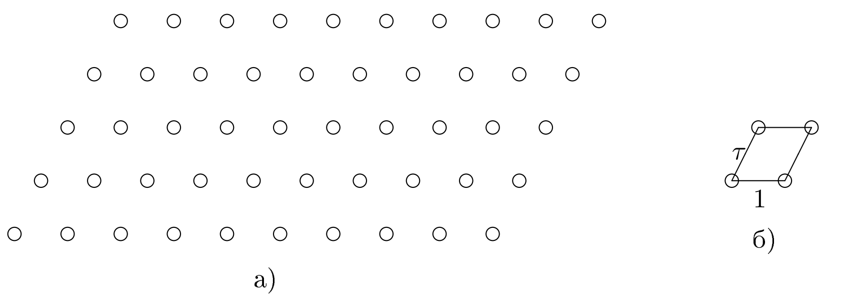

Рис. 2.6: а) Решетка на комплексной прямой и б) Фундаментальный параллелограмм этой решетки

2.6 Факторкривая

Еще один способ построения комплексных кривых состоит наоборот в опускании комплексной структуры с кривой на накрываемую кривую. Допустим на комплексной кривой Y дискретно и без неподвижных точек действует группа преобразований G, сохраняющих комплексную структуру, т.е. группа биголоморфных отображений кривой на себя. Тогда факторпространство — т.е. множество орбит — по действию этой группы наделено естественной структурой комплексной кривой.

Пример 2.6.1. Пусть $Y = \mathbb{C}$ — комплексная прямая. Рассмотрим на этой прямой решетку, порожденную над $\mathbb{Z}$ двумя векторами 1 и τ, где $\tau \in \mathbb{C}$ — комплексное число с положительной мнимой частью, см. рис. 2.6. Сдвиги на эти два вектора порождают группу преобразований комплексной прямой, сохраняющих комплексную структуру на $\mathbb{C}$. Это свободная коммутативная группа с двумя образующими. Ее орбиты это образы решетки при всевозможных сдвигах. Фактор по действию этой группы — двумерный тор, который можно отождествить с параллелограммом, натянутым на векторы 1 и τ, с отождествленными противоположными сторонами. Такой тор называется *эллиптической кривой*.

Упражнение 2.6.2. Приведите пример двух неизоморфных эллиптических кривых.

Поскольку комплексная прямая является абелевой группой по сложению, а решетка — подгруппой в ней, всякая эллиптическая кривая наделена структурой абелевой группы — факторгруппы прямой по решетке. Образ решетки служит нулем этой группы. Заметим, однако, что сдвигом можно перенести нуль группы в любую наперед заданную точку кривой (разумеется, групповая структура претерпит при этом соответствующие изменения).

Упражнение 2.6.3. Докажите, что если в качестве нуля группы эллиптической кривой выбрать одну из точек перегиба, то все девять точек перегиба образуют подгруппу 3-кручения в этой группе.

2.7 Мероморфные функции

Голоморфное отображение $f\colon C \to \mathbb{CP}^1$ называют *мероморфной функцией* на кривой C. При этом подразумевается, что сфера Римана $\mathbb{CP}^1$ представлена в виде $\mathbb{C} \cup \infty$; в частности, на ней есть две выделенные точки — 0 и ∞. Прообразы точки 0 — это нули функции f, а прообразы точки ∞ — полюсы. Мы считаем, что порядки нулей положительны, а порядки полюсов отрицательны.

Произведение двух функций с общим нулем имеет в той же точке нуль, порядок которого равен сумме порядков нулей сомножителей; произведение двух функций с общим полюсом имеет в той же точке полюс, порядок которого равен сумме порядков полюсов сомножителей. Более общим образом, если считать, что порядок функции в точке, значение в которой отлично от 0 и ∞, равен нулю, то порядок произведения функций в любой точке равен сумме порядков сомножителей в этой точке.

Примером мероморфной функции может служить любой многочлен

$$z \mapsto P(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n, \qquad p_i \in \mathbb{C}, p_0 \neq 0, n \geq 1,$$

на сфере Римана. Действительно, голоморфность задаваемого многочленом отображения в любой конечной точке проективной прямой очевидна. Чтобы посмотреть, как ведет себя многочлен в бесконечности, сделаем замену координат $z = 1/y$. В координате y в окрестности бесконечности отображение принимает вид

$$y \mapsto P(1/y) = \frac{p_0}{y^n} + \frac{p_1}{y^{n-1}} + \dots + p_n = \frac{1}{y^n}(p_0 + p_1 y + \dots + p_n y^n).$$

Выражение $1/P(1/y)$, задающее координатное представление функции в окрестности бесконечности на кривой-образе, имеет вид

$$\frac{1}{P(1/y)} = \frac{y^n}{p_0 + p_1 y + \dots + p_n y^n} = \frac{1}{p_0} y^n - \frac{p_1}{p_0^2} y^{n+1} + \frac{p_2 - p_1 p_0}{p_0^3} y^{n+2} + \dots,$$

т.е. задает голоморфную функцию с нулем порядка n (напомним, что $p_0 \neq 0$). Это означает, что функция P имеет в бесконечности полюс порядка n.

Теорема 2.7.1. *На сфере Римана любая мероморфная функция является рациональной функцией, т.е. отношением двух многочленов $P(z)/Q(z)$.*

Доказательство. Пусть f — мероморфная функция на сфере Римана $\mathbb{CP}^1$. Сфера Римана компактна, поэтому число нулей и полюсов конечно. Пусть $z_1, \dots, z_n$ — нули и полюсы функции f, а $e_1, \dots, e_n$ — их порядки. Рассмотрим рациональную функцию $r(z) = (z - z_1)^{e_1} \dots (z - z_n)^{e_n}$; в конечной плоскости она имеет те же самые нули и полюсы, что и функция f. Рассмотрим функцию $g(z) = f(z)/r(z)$. Эта функция мероморфна на всей сфере Римана и не имеет нулей и полюсов в конечной плоскости. В частности, как функция на $\mathbb{C}$, она голоморфна, а потому ее можно представить в виде ряда Тейлора: $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Функция $g(z)$ мероморфна также в точке ∞. Для локальной координаты $w = 1/z$ в точке ∞ это означает, что функция $g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^{-k}$ мероморфна в точке $w = 0$. Следовательно, $g(z)$ — многочлен, причем по построению у него нет нулей на всей комплексной плоскости. Таким образом, $g(z) = \mathrm{const}$ и функция $f(z)$ рациональна. $\square$

Следствие 2.7.2. *Сумма порядков нулей и полюсов мероморфной функции на сфере Римана равна 0.*

Доказательство. Это очевидно для многочлена — его степень равна с одной стороны порядку его полюса на бесконечности, а с другой — числу его корней, — а потому и для любой рациональной функции. $\square$

Замечание 2.7.3. Впоследствии мы покажем, что сумма порядков нулей и полюсов мероморфной функции f на *любой* гладкой кривой равна 0 (теорема 6.6.3). Из топологических соображений это утверждение совершенно очевидно. Действительно, сумма порядков нулей мероморфной функции равна степени определяемого ею разветвленного накрытия проективной прямой. Сумма порядков ее полюсов это та же самая степень, но взятая со знаком минус. Поэтому сумма этих чисел равна 0. В топологическом смысле нули и полюса мероморфной функции никак не выделяются среди прообразов точек проективной прямой — сумма кратностей прообразов любой точки равна степени функции.

В однородных координатах многочлен степени n на комплексной проективной прямой записывается как отношение двух однородных многочленов степени n, а именно, $P(z/w) = (\sum a_i z^i w^{n-i})/w^n$. Поэтому любая мероморфная функция на комплексной прямой в однородных координатах представляется в виде отношения двух однородных многочленов одной и той же степени.

Теорема 2.7.4. *Если мероморфная функция на гладкой компактной кривой C имеет только один простой полюс, то C — это сфера Римана $\mathbb{CP}^1$.*

Доказательство. Пусть p — полюс данной мероморфной функции. Рассмотрим задаваемое ею отображение $f\colon C \to \mathbb{CP}^1$. По условию точка p — единственная точка, которая отображается в $\infty \in \mathbb{CP}^1$, причем отображение f имеет кратность 1 в точке p. Следовательно, отображение f является 1-листным накрытием, т.е. f — гомеоморфизм. $\square$

Воспользовавшись описанием мероморфных функций на сфере (теорема 2.7.1) и тем фактом, что гиперэллиптическая кривая двулистно разветвленно накрывает сферу, можно получить следующее описание мероморфных функций на гиперэллиптических кривых.

Теорема 2.7.5. *Пусть C — гиперэллиптическая кривая, заданная уравнением $y^2 = P(x)$. Тогда любую мероморфную функцию f на C можно единственным образом представить в виде $f = R(x) + yS(x)$, где R и S — рациональные функции от x.*

Доказательство. Пусть σ — гиперэллиптическая инволюция на кривой C, $p\colon C \to \mathbb{CP}^1$ — отображение (двулистное разветвленное накрытие), заданное формулой $(x : y : z) \mapsto (x : z)$. Отметим, что σ — голоморфное отображение. Ясно также, что $p \circ \sigma = p$.

Гиперэллиптическая инволюция действует на пространстве мероморфных функций на гиперэллиптической кривой — каждой мероморфной функции f на кривой C можно сопоставить мероморфную функцию $\sigma^* f = f \circ \sigma$. При этом функция $f + \sigma^* f$ инвариантна относительно σ^*, поскольку $\sigma^*(f + \sigma^* f) = \sigma^* f + f$ (мы здесь воспользовались тем, что $\sigma^2 = \mathrm{id}$).

Каждой мероморфной функции r на сфере Римана $\mathbb{CP}^1$ можно сопоставить мероморфную функцию $g = p^* r = r \circ p$ на кривой C. Функция g инвариантна относительно σ^*, поскольку $\sigma^* g = g \circ \sigma = r \circ p \circ \sigma = r \circ p = g$. Покажем, что в действительности любая мероморфная функция g на кривой C, инвариантная относительно σ^*, получается таким образом из мероморфной функции r на сфере Римана, причем функция r определена однозначно. А именно, для точки $\xi \in C$ положим $r(\xi) = g(\xi)$; корректность этого определения следует из того, что функция g инвариантна относительно σ^*.

Функция $f + \sigma^* f$ является σ^*-инвариантной. Функция $f - \sigma^* f$, как и функция y, является σ^*-антиинвариантной, поэтому функция $(f - \sigma^* f)/y$ является σ^*-инвариантной. Следовательно, $f + \sigma^* f = \frac{1}{2} R(x)$ и $(f - \sigma^* f)/y = \frac{1}{2} S(x)$, где $R(x)$ и $S(x)$ — некоторые мероморфные (т.е. рациональные) функции на сфере. Из этих равенств получаем требуемое. $\square$

Упражнение 2.7.6. Докажите, что у любой мероморфной функции на эллиптической кривой сумма порядков нулей совпадает с суммой порядков полюсов.

Глава 17

Взгляд назад с точки зрения характеристических классов

Введение характеристических классов позволяет по-новому посмотреть на многие ранее проведенные вычисления и упростить их вывод.

17.1 Род полного пересечения