Глава 1

Алгебраические кривые

Алгебраические кривые — это кривые, которые можно задать полиномиальными уравнениями в проективных пространствах. С другой стороны, алгебраические кривые это одномерные комплексные многообразия, и для их задания не требуется никуда их вкладывать. Мы рассмотрим различные способы задания кривых и обсудим, как установить, приводят ли они к одной и той же кривой.

1.1 Плоские алгебраические кривые

Начнем с наиболее наглядного и привычного объекта — кривых на плоскости, а затем перейдем к кривым в комплексном проективном пространстве.

Кривая на плоскости задается одним полиномиальным уравнением. Если все коэффициенты уравнения вещественные, то комплексная кривая является вещественной. Вещественные точки $(x : y : z)$, лежащие на вещественной кривой, образуют *вещественную часть* этой кривой. У нас нет хороших способов изображения комплексных кривых, поэтому для иллюстрации мы будем использовать вещественные части плоских вещественных кривых, попадающие в выбранную аффинную карту.

Простейшая алгебраическая кривая — прямая. Она задается линейным однородным уравнением $ax + by + cz = 0$. Через любую пару различных точек на проективной плоскости проходит ровно одна прямая, а любые две различные прямые пересекаются ровно в одной точке. На рис. 1.1 также приведены кривая степени 2 (квадрика) и три кривые степени 3 (кубики).

Плоской алгебраической кривой называют кривую в $\mathbb{CP}^2$, заданную однородным полиномиальным уравнением $\sum\limits_{i+j+k=n} a_{ijk}x^iy^jz^k = 0$, где i, j, k — неотрицательные целые числа, причем не все коэффициенты a_{ijk} равны 0.

Рис. 1.1: Различные плоские кривые

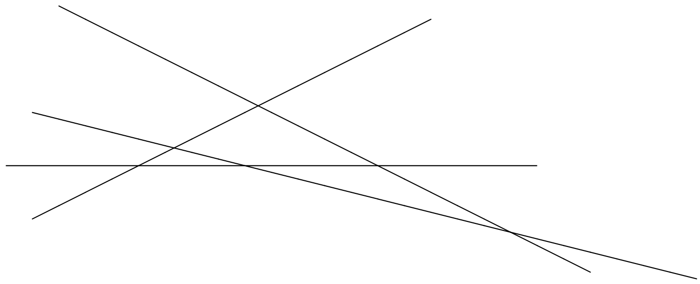

Рис. 1.2: Простейшая приводимая кривая степени 4

!!! Число n называют при этом *степенью* кривой. Для того, чтобы записать уравнение кривой в одной из аффинных карт $x = 1$, $y = 1$ или $z = 1$, нужно просто подставить в уравнение это значение — оно превратится в неоднородное уравнение от двух остальных переменных.

Плоскую алгебраическую кривую $F(x, y, z) = 0$ называют *неприводимой*, если однородный многочлен F нельзя представить в виде произведения однородных многочленов F_1 и F_2 положительной степени. В противном случае кривую называют *приводимой*. Как множество точек приводимая кривая представляет собой объединение кривых $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$.

Простейшая приводимая кривая степени n задается уравнением $l_1 \cdots l_n = 0$, где $l_1, \dots, l_n$ — попарно различные линейные функции. Как множество точек эта кривая представляет собой объединение прямых $l_1 = 0, \dots, l_n = 0$, см. рис. 1.2.

Простейшая приводимая кривая $l_1 \cdots l_n = 0$ во многих ситуациях помогает выяснить, как обстоят дела в случае произвольной кривой степени n. Например, кривые $l_1 \cdots l_m = 0$ и $l'_1 \cdots l'_n = 0$, не содержащие общих прямых, имеют mn точек пересечения. Ниже мы покажем, что любые кривые степени m и n имеют либо mn общих точек (с учетом кратности), либо бесконечно много общих точек.

Наряду с неприводимостью важным свойством кривых является гладкость. *Гладкая кривая* на комплексной проективной плоскости — это подмножество $C \subset \mathbb{CP}^2$, задаваемое уравнением $F(x, y, z) = 0$, где F — *невырожденный* однородный многочлен от трех переменных. Условие невырожденности здесь означает, что на кривой $F(x, y, z) = 0$ нет особых точек многочлена F, т.е. точек, в которых обращается в нуль дифференциал

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz.$$

Гладкая кривая неприводима.

Условие невырожденности кривой C иногда бывает проще проверять не в однородных координатах, а для некоторой карты. Это условие для карты выглядит следующим образом. Пусть $A \in C$ — точка кривой. Рассмотрим произвольную карту, в которой лежит точка A; пусть это будет, например, карта $z = 1$. Тогда условие "для многочлена $f(x, y) = F(x, y, 1)$ дифференциал

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

не обращается в нуль в точке A" эквивалентно предыдущему, потому что для произвольного однородного многочлена $F(x, y, z)$ степени n выполняется *тождество Эйлера*

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = nF.$$

Таким образом, если $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ в некоторой точке кривой, то и $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ в этой точке.

Упражнение 1.1.1. Докажите тождество Эйлера.

Замечание 1.1.2. Условие невырожденности удобно проверять, действуя в обратном направлении. Сначала следует найти особые точки многочлена $F(x, y, z)$ на проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$. Как правило, их число конечно. Затем следует проверить, лежит ли какая-нибудь из них на нашей кривой C.

Пример 1.1.3. Рассмотрим плоскую кривую, заданную уравнением

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Условие вырождения многочлена F означает, что $\partial F/\partial x = \partial F/\partial y = \partial F/\partial z = 0$, т.е. $x = y = z = 0$. Поскольку ни одна из точек проективной плоскости не имеет таких однородных координат, у многочлена F вообще нет никаких особых точек.

Пример 1.1.4. Рассмотрим плоскую кривую, заданную уравнением

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 = 0.$$

Условие вырождения многочлена F означает, что $\partial F/\partial x = \partial F/\partial y = \partial F/\partial z = 0$, т.е. $x = y = 0$. Это условие выделяет точку $(0 : 0 : 1)$ на проективной плоскости. Она лежит на кривой $x^2 + y^2 = 0$, поэтому рассматриваемая кривая особая. На самом деле она представляет собой пару проективных прямых, задаваемых уравнениями $x + iy = 0$ и $x - iy = 0$. Эти прямые пересекаются в единственной точке — особой точке кривой.

Упражнение 1.1.5. Пусть C — невырожденная коника на плоскости, т.е. невырожденная кривая, заданная уравнением второй степени. Докажите, что в подходящей системе координат она имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

Пусть $(0, 0)$ — особая точка кривой, заданной в аффинной карте уравнением $f(x, y) = 0$. Тогда константа и линейная часть многочлена f равны нулю. Особая точка кривой называется *простой двойной точкой*, если квадратичная часть многочлена f невырождена. В этом случае квадратичная часть многочлена f представляется в виде произведения двух различных

Рис. 1.3: Кривая с простой двойной точкой

линейных функций, а кривая $f = 0$ выглядит в окрестности точки $(0, 0)$ как пара пересекающихся прямых (см. рис. 1.3).

Дадим определение касательной к кривой в $\mathbb{CP}^2$. Пусть точка A принадлежит кривой $F = 0$, т. е. $F(A) = 0$. Возьмем произвольную точку $P = (p_1 : p_2 : p_3)$ и рассмотрим прямую PA. Точки этой прямой имеют координаты $A + tP$, $t \in \mathbb{C}$. Поэтому точки пересечения прямой PA и кривой $F(X) = 0$ соответствуют корням полиномиального уравнения

$$F(A + tP) = F(A) + t \sum \frac{\partial F}{\partial x_i}(A) p_i + \ldots = 0. \tag{1.1}$$

Из равенства $F(A) = 0$ следует, что уравнение (1.1) имеет корень $t = 0$. В том случае, когда корень $t = 0$ по меньшей мере двукратный, т. е. $\sum \frac{\partial F}{\partial x_i}(A) p_i = 0$, прямую PA называют *касательной* к кривой $F = 0$ в точке A.

Любая прямая, проходящая через особую точку, является касательной к данной кривой. Однако если особая точка — простая двойная, то через нее проходит две прямые, которые естественно считать касательными к *ветвям* кривой в этой точке. Это две прямые, произведение уравнений которых дает квадратичную часть уравнения кривой в простой двойной точке.

Упражнение 1.1.6. Докажите, что в декартовых координатах (x, y) касательная к кривой $f(x, y) = 0$ в гладкой ее точке (x_0, y_0) задается уравнением

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Упражнение 1.1.7. Пусть $A = (x_0 : y_0 : z_0)$ — точка кривой $F = 0$ в $\mathbb{CP}^2$. Докажите, что уравнения

$$x\frac{\partial F}{\partial x}(A) + y\frac{\partial F}{\partial y}(A) + z\frac{\partial F}{\partial z}(A) = 0$$

и

$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(A) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(A) + (z - z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(A) = 0$$

эквивалентны.

Если A — особая точка кривой $F = 0$, то

$$F(A + tP) = a_0(P) + a_1(P)t + a_2(P)t^2 + \ldots,$$

где $a_0(P) = a_1(P) = 0$. В том случае, когда $a_0(P) = \ldots = a_{k-1}(P) = 0$ для всех точек P и $a_k(P) \neq 0$ для некоторой точки P, число k называют *кратностью* особой точки A. Например, для кривой $l_1 \cdots l_k = 0$, где $l_1, \ldots, l_k$ — линейные функции, обращающиеся в нуль в точке A, кратность точки A равна k.

Упражнение 1.1.8. а) Найдите кратность точки $(0,0)$ кривой $y^2 = x^2(x-1)$.
б) Найдите кратность точки $(0,0)$ кривой $y^2 = x^3$.

Упражнение 1.1.9. Пусть A — особая точка кратности k кривой $F = 0$. Докажите, что ограничение полинома F на любую прямую, проходящую через точку A, имеет в точке A корень кратности не меньше k, причем кратность корня больше k лишь для конечного числа прямых.

Упражнение 1.1.10. Найдите особые точки следующих кривых в $\mathbb{CP}^2$:
а) $y^2z = x^3$;
б) $y^2z^{n-2} = \prod\limits_{i=1}^{n}(x - a_iz), \quad n \geq 4,\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ попарно различны.

Обсудим следующий вопрос: сколько точек на проективной плоскости нужно задать, чтобы через них проходила единственная кривая степени n? Сначала просто посчитаем, сколько нужно параметров, чтобы задать кривую степени n. Такая кривая задается уравнением $\sum_{i+j+k=n} a_{ijk}x^iy^jz^k = 0$. Количество коэффициентов a_{ijk} равно количеству различных представлений числа n в виде упорядоченной суммы трех неотрицательных чисел. Чтобы получить такое представление, нужно в последовательности из n единиц вставить две перегородки, т.е. выбрать 2 элемента из $n+2$. Таким образом, количество коэффициентов в уравнении кривой степени n равно $\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$. Но пропорциональные уравнения задают одну и ту же кривую, поэтому для задания кривой степени n нужно $d = \binom{n+2}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$ параметров. Тем самым, через $d = n(n+3)/2$ точек скорее всего проходит конечное число кривых степени n. Например, при $n = 1$ имеем $d = 2$, и действительно, через две различные точки проходит ровно одна прямая.

Упражнение 1.1.11. Докажите, что через $2 \cdot 5/2 = 5$ точек на плоскости в общем положении проходит одна кривая второй степени.

Чтобы сделать эти неформальные рассуждения строгими, нам потребуется так называемое *отображение Веронезе* $v_n : \mathbb{CP}^2 \to \mathbb{CP}^d$, сопоставляющее точке $(x : y : z) \in \mathbb{CP}^2$ точку с проективными координатами $u_{ijk} = x^iy^jz^k$, где $i+j+k = n$; здесь $d = \binom{n+2}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$.

Упражнение 1.1.12. а) Проверьте, что, если числа x, y, z не все равны нулю, то по крайней мере одно из чисел $x^iy^jz^k$ не равно нулю.
б) Докажите, что отображение Веронезе разные точки плоскости $\mathbb{CP}^2$ переводит в разные точки пространства $\mathbb{CP}^d$.

Кривая $\sum a_{ijk}x^iy^jz^k = 0$ при отображении Веронезе переходит в сечение образа плоскости $\mathbb{CP}^2$ в $\mathbb{CP}^d$ гиперплоскостью $\sum a_{ijk}u_{ijk} = 0$. Ясно также, что образ плоскости $\mathbb{CP}^2$ в $\mathbb{CP}^d$ не может целиком содержаться в одной гиперплоскости $\sum a_{ijk}u_{ijk} = 0$, поскольку иначе все точки $\mathbb{CP}^2$ должны были бы лежать на кривой $\sum a_{ijk}x^iy^jz^k = 0$.

Через любые d точек в $\mathbb{CP}^d$ можно провести гиперплоскость. Это означает, в частности, что через любые d точек в $\mathbb{CP}^2$ можно провести кривую степени n. Поскольку образ плоскости $\mathbb{CP}^2$ не лежит в одной гиперплоскости, в $\mathbb{CP}^2$ можно выбрать $d+1$ точек так, чтобы их образы не лежали в одной гиперплоскости. Это означает, что в $\mathbb{CP}^2$ можно выбрать $d+1$ точек так, что через них нельзя провести кривую степени n.

Требуемые $d+1$ точек можно выбрать, например, следующим образом. Точку A_1 выбираем произвольно. После того как выбраны точки $A_1, \dots, A_k$, проводим через них кривую степени n и выбираем точку A_{k+1} вне этой кривой. Иными словами, мы проводим гиперплоскость через образы точек $A_1, \dots, A_k$ в $\mathbb{CP}^d$ и выбираем точку в образе $\mathbb{CP}^2$, но вне полученной гиперплоскости. Эта конструкция позволяет выбрать в $\mathbb{CP}^d$ точки, не лежащие в одной гиперплоскости. Им соответствуют точки в $\mathbb{CP}^2$, не лежащие на одной кривой степени n.

Образы выбранных точек $A_1, \dots, A_{d+1}$ при отображении Веронезе служат вершинами d-мерного симплекса. Любые d из этих точек соответствуют грани симплекса. Это, в частности, означает, что через точки $A_1, \dots, A_d$ проходит единственная кривая степени n.

Подведем итоги. Через любые $d = \frac{n(n+3)}{2}$ точек в $\mathbb{CP}^2$ можно провести кривую степени n. В $\mathbb{CP}^2$ можно указать d точек, через которые проходит единственная кривая степени n. Более того, если через данные d точек проходит не одна кривая степени n, то малым шевелением данных точек можно добиться того, чтобы через полученные точки проходила единственная кривая степени n (малым шевелением d точек, лежащих в одной $(d-2)$-мерной плоскости, можно перевести в d точек, не лежащих в одной $(d-2)$-мерной плоскости).

Упражнение 1.1.13. Пусть прямые p_1, p_2 и p_3 на плоскости пересекают прямые q_1, q_2 и q_3 в 9 различных точках. Докажите, что образы этих точек при отображении Веронезе $v_3\colon \mathbb{CP}^2 \to \mathbb{CP}^9$ лежат в одной 7-мерной плоскости.

Условие того, что кривая степени n проходит через некоторую фиксированную точку, выделяет проективное подпространство коразмерности 1 в $\mathbb{CP}^d$. Если же потребовать, чтобы кривая не только проходила через некоторую точку, но и эта точка имела кратность не менее k, то такое условие выделяет подпространство коразмерности $\frac{k(k+1)}{2}$. Действительно, можно считать, что данная точка имеет координаты $(0:0:1)$. Запишем уравнение кривой в виде $a_0 z^n + a_1(x,y) z^{n-1} + \ldots + a_n(x,y)$, где $a_s(x,y)$ — однородный многочлен степени s. Условие заключается в том, что многочлены $a_0, \ldots, a_{k-1}$ нулевые. Всего получаем $1+2+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ линейных условий.

Упражнение 1.1.14. Какова размерность условия “кривая касается данной прямой”? А если требуется порядок касания не менее k?

1.2 Теорема Безу и ее приложения

Пусть A — общая точка двух кривых $F=0$ и $G=0$ на проективной плоскости. Для каждой из двух кривых эта точка может оказаться особой или гладкой. Кроме того, если для обеих кривых точка A гладкая, то кривые могут в ней касаться друг друга или пересекаться трансверсально. Общая точка двух кривых, гладкая для обеих кривых, называется *точкой трансвер-*

Рис. 1.4: Взаимное расположение кривых в общей точке: а) трансверсальное пересечение в гладкой точке обеих кривых; б) касание в гладкой точке обеих кривых; в) общая точка является гладкой для одной из кривых и особой для другой; г) общая точка является особой для обеих кривых.

Рис. 1.5: а) Трансверсальное пересечение устойчиво относительно малых изменений коэффициентов кривых; б) касание неустойчиво относительно малых изменений коэффициентов кривых — оно превращается в пару трансверсальных пересечений; в) тройное пересечение также неустойчиво — при малом изменении коэффициентов оно превращается в три трансверсальных попарных пересечения.

сального пересечения (соответственно, *точкой касания*), если касательные прямые к двум кривым в этой точке различны (соответственно, совпадают). Варианты взаимного расположения двух кривых в их общей точке приведены на рис. 1.4. Трансверсальное пересечение кривых является устойчивым: при небольшом изменении уравнений кривых в окрестности трансверсального пересечения по-прежнему будет находиться точка трансверсального пересечения новых кривых. Касание — неустойчивая конфигурация: при небольшом изменении коэффициентов кривых касание может превратиться в две (или более) точек трансверсального пересечения, см. рис. 1.5. (Обратите внимание на то, что при шевелении касающиеся кривые не могут превратиться в непересекающиеся — вещественная картинка в этом случае дает неправильную подсказку.)

Займемся перечислением точек пересечения кривых. Рассмотрим сначала случай, когда одна из кривых — прямая, и пусть она пересекает кривую степени n, заданную однородным уравнением $F(x,y,z)=0$. Прямую можно параметризовать отображением $\mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^2$. В аффинной координате t на прямой такое отображение записывается в виде

$$t \mapsto (x_0 + x_1 t, y_0 + y_1 t, z_0 + z_1 t).$$

Его композиция с многочленом F дает уравнение на точки пересечения прямой с кривой $F=0$:

$$F(x_0 + x_1 t, y_0 + y_1 t, z_0 + z_1 t) = 0.$$

Это полиномиальное уравнение степени n от t. Образы n его корней — это n точек пересечения прямой и кривой. Если они все различны, то прямая и кривая пересекаются трансверсально во всех своих общих точках. Некоторые корни или их образы могут совпадать — в этом случае мы имеем кратные точки пересечения. Однако сумма кратностей всегда одинакова — она равна n, степени кривой. Поэтому прямая пересекает кривую степени n в n точках с учетом кратностей.

Чтобы понять, как пересекаются кривые более высоких степеней, рассмотрим пересечение кривой третьей степени и кривой второй степени.

Пусть $F(x, y, z) = 0$ и $G(x, y, z) = 0$ — однородные уравнения наших кривых. Многочлены F и G можно записать в виде

$$F(x, y, z) = a_0 y^3 + a_1(x, z) y^2 + a_2(x, z) y + a_3(x, z),$$
$$G(x, y, z) = b_0 y^2 + b_1(x, z) y + b_2(x, z),$$

где степени однородных многочленов $a_k(x, z)$ и $b_k(x, z)$ равны k (если соответствующий многочлен отличен от тождественного нуля). Точка $(x_0 : y_0 : z_0)$ является точкой пересечения кривых $F = 0$ и $G = 0$ тогда и только тогда, когда многочлены $F(x_0, y, z_0)$ и $G(x_0, y, z_0)$ имеют общий корень y_0.

Пусть $\varphi = \varphi(y)$ и $\psi = \psi(y)$ — произвольные комплексные многочлены степени m и n соответственно. Эти многочлены имеют общий корень над полем $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда существуют многочлены φ_1 и ψ_1, степени которых меньше m и n соответственно и $\varphi\psi_1 = \psi\varphi_1$. В самом деле, если φ и ψ имеют общий корень над $\mathbb{C}$, то они имеют над $\mathbb{C}$ общий делитель η, степень которого не меньше 1. Тогда мы можем взять $\varphi_1 = \varphi/\eta$ и $\psi_1 = \psi/\eta$. Наоборот, если $\varphi\psi_1 = \psi\varphi_1$, то в многочлен $\Phi = \varphi\psi_1 = \psi\varphi_1$ входят все множители, на которые разлагаются многочлены φ и ψ, но степень многочлена Φ меньше суммы степеней многочленов φ и ψ. Поэтому многочлены φ и ψ имеют общий делитель, а значит, они имеют общий корень над полем $\mathbb{C}$.

Тем самым, кривые $F(x, y, z) = 0$ и $G(x, y, z) = 0$, степени которых равны m и n соответственно, имеют общую точку $(x_0 : y_0 : z_0)$ тогда и только тогда, когда для многочленов $F(x_0, y, z_0)$ и $G(x_0, y, z_0)$ можно подобрать такие многочлены $f_1(y)$ и $g_1(y)$, что $Fg_1 = f_1G$, причем $\deg g_1 < n$ и $\deg f_1 < m$. Но при этом мы предполагаем, что степени многочленов $F(x_0, y, z_0)$ и $G(x_0, y, z_0)$ совпадают со степенями кривых, т. е. мы требуем, чтобы выполнялись условия $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$. Ниже мы убедимся, что выполнения этих условий всегда можно добиться, сделав замену координат.

В случае, когда $m = 3$ и $n = 2$, многочлены f_1 и g_1 имеют вид $f_1(y) = u_0 y^2 + u_1 y + u_2, \quad g_1(y) = v_0 y + v_1$. Коэффициенты u_0, u_1, u_2, v_0, v_1 нужно подобрать так, чтобы совпадали два многочлена

$$(a_0 y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3)(v_0 y + v_1) = (b_0 y^2 + b_1 y + b_2)(u_0 y^2 + u_1 y + u_2),$$

т. е. выполнялись равенства

$$\begin{array}{llllll}
a_0 v_0 & & = b_0 u_0, & & & \\
a_1 v_0 & + a_0 v_1 & = b_1 u_0 & + b_0 u_1, & & \\
a_2 v_0 & + a_1 v_1 & = b_2 u_0 & + b_1 u_1 & + b_0 u_2, & \\
a_3 v_0 & + a_2 v_1 & = & + b_2 u_1 & + b_1 u_2, & \\
 & a_3 v_1 & & & b_2 u_2. &
\end{array}$$

В результате получаем систему линейных уравнений относительно v_0, v_1, u_0, u_1, u_2. Эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

равен нулю.

Для кривых в $\mathbb{CP}^2$ степени однородных многочленов $a_i(x,z)$ и $b_i(x,z)$ в точности равны i (если только эти многочлены не нулевые). Ясно также, что для кривой в $\mathbb{CP}^2$

$$a_0 = F(0,1,0) \quad \text{и} \quad b_0 = G(0,1,0).$$

Это означает, что условие $a_0b_0 \neq 0$ выполняется, если ни одна из кривых $F = 0$ и $G = 0$ в $\mathbb{CP}^2$ не проходит через бесконечно удаленную точку $(0:1:0)$.

Для кривых $F = 0$ и $G = 0$ произвольной степени можно построить матрицу, аналогичную матрице (1.2). Определитель этой матрицы называют *результантом* многочленов f и g. Для кривых на плоскости $\mathbb{CP}^2$, рассматриваемых в аффинной карте $y = 1$, результант представляет собой многочлен от x и z. Корни результанта соответствуют точкам пересечения кривых.

Теорема 1.2.1 (Безу). *Для кривых степени m и n в $\mathbb{CP}^2$ результант представляет собой однородный многочлен степени mn (или тождественно равен нулю).*

Доказательство. Ограничимся снова случаем $m = 3$ и $n = 2$. Пусть $R(x,z)$ — определитель матрицы

$$S = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Требуется доказать, что $R(\lambda x, \lambda z) = \lambda^6 R(x,z)$. Действительно, в таком случае либо R тождественно равен нулю, либо R — однородный многочлен степени 6.

По условию $a_k(\lambda x, \lambda z) = \lambda^k a_k(x,z)$ и $b_k(\lambda x, \lambda z) = \lambda^k b_k(x,z)$. Поэтому $R(\lambda x, \lambda z) = \det\ S_\lambda$, где

$$S_\lambda = \begin{pmatrix} a_0 & \lambda a_1 & \lambda^2 a_2 & \lambda^3 a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & \lambda a_1 & \lambda^2 a_2 & \lambda^3 a_3 \\ b_0 & \lambda b_1 & \lambda^2 b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & \lambda b_1 & \lambda^2 b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & \lambda b_1 & \lambda^2 b_2 \end{pmatrix}.$$

Домножим первую и вторую строки матрицы S_λ на 1 и λ, а третью, четвертую и пятую строки — на 1, λ и λ^2 соответственно. В результате получим матрицу S, столбцы которой домножены на 1, λ, λ^2, λ^3 и λ^4. Поэтому $\det S_\lambda = \lambda^{p-q-r} \det S$, где $p = 1+2+3+4 = 10$, $\quad q = 1$ и $r = 1+2 = 3$. В общем случае $p = 1+2+\ldots+(m+n-1)$, $q = 1+2+\ldots+(m-1)$ и $r = 1+2+\ldots+(n-1)$. Поэтому

$$p-q-r = \frac{(m+n)(m+n-1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = mn.$$

$\square$

Упражнение 1.2.2. Пусть A — точка кратности r кривой $f = 0$ и кратности s кривой $g = 0$. Докажите, что точке A соответствует корень результанта многочленов f и g, имеющий кратность не меньше rs.

Вот еще одно, на этот раз топологическое, доказательство теоремы Безу. Пусть первая кривая представляет собой набор из m различных прямых, проходящих через одну точку, а вторая — набор из n различных прямых, также проходящих через одну точку, причем в этих наборах нет совпадающих прямых. Очевидно, что эти две кривые имеют mn точек трансверсального пересечения. Если немного изменить коэффициенты кривых, то мы получим пару кривых, по-прежнему имеющих mn точек трансверсального пересечения. Тем самым в пространстве пар кривых (т.е. в произведении двух проективных пространств — пространства коэффициентов кривых степени m и пространства коэффициентов кривых степени n) есть открытое подмножество кривых, имеющих mn точек трансверсального пересечения. Условие нетрансверсальности пересечения двух кривых — алгебраическое условие, выделяющее гиперповерхность в пространстве пар кривых. Гиперповерхность в комплексном многообразии не разделяет его. Дополнение к гиперповерхности — связное открытое плотное подмножество, состоящее из пар кривых, пересекающихся трансверсально, причем для всех таких пар число точек пересечения одно и то же. Отсюда вытекает, что пространство пар кривых содержит открытое плотное подмножество пар кривых, пересекающихся трансверсально и имеющих одинаковое число mn точек пересечения. Пары кривых с нетрансверсальным пересечением также имеют mn точек пересечения с учетом кратности (если у них нет общих неприводимых компонент). Теорема доказана.

Приведем теперь некоторые приложения теоремы Безу. Напомним, что через любые $d = \frac{n(n+3)}{2}$ точек на плоскости проходит кривая степени n. Для почти всех наборов из d точек такая кривая единственна. В том случае, когда через данные d точек проходит единственная кривая степени n, будем говорить, что эти точки находятся в общем положении. Подмножества системы точек общего положения тоже будем называть точками общего положения (для кривой той же степени n).

С помощью теоремы Безу можно доказать некоторые свойства систем точек алгебраических кривых. Речь в этих теоремах идет, как правило, о точках общего положения.

Рис. 1.6: Шестиугольник, вписанный в конику. Стороны шестиугольника разбиты на две группы по три стороны в каждой. Точки пересечения сторон первой группы с несмежными с ними сторонами второй группы лежат на одной прямой.

Теорема 1.2.3. *Пусть две кривые степени n пересекаются в n^2 точках, причем np из этих точек лежат на неприводимой кривой степени p. Тогда оставшиеся $n(n-p)$ точек лежат на кривой степени $n-p$.*

Доказательство. Пусть $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$ — уравнения данных кривых степени n, $G = 0$ — уравнение кривой степени p, на которой лежат данные np точек. Для любой точки плоскости числа λ_1 и λ_2 можно подобрать так, чтобы кривая $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$ проходила через эту точку. Поэтому можно считать, что кривая $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$ проходит через некоторую точку кривой $G = 0$, отличную от данных np точек. Тогда кривые $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$ и $G = 0$ имеют $np + 1$ общих точек, а значит, они имеют общую компоненту. В силу неприводимости кривой $G = 0$ этой общей компонентой может быть лишь сама эта кривая. Поэтому $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = GH$, где H — некоторый однородный полином степени $n - p$. Кривая $GH = 0$ проходит через все n^2 точек, а кривая $G = 0$ проходит лишь через данные np точек. Следовательно, кривая $H = 0$ проходит через все оставшиеся $n(n-p)$ точек. □

Следствие 1.2.4. *Пусть $2n$-угольник вписан в кривую степени 2 (см. рис. 1.6). Тогда все точки, в которых стороны с четными номерами пересекают несмежные с ними стороны с нечетными номерами, лежат на одной кривой степени $n-2$.*

Доказательство. Прямые, содержащие стороны с четными номерами, образуют одну вырожденную кривую степени n, а прямые, содержащие стороны с нечетными номерами, образуют другую кривую. Вершины $2n$-угольника образуют систему из $2n$ точек пересечения рассматриваемых кривых. Эти точки лежат на кривой степени 2, поэтому остальные $n(n-2)$ точек лежат на кривой степени $n-2$. □

Пучком кривых называют семейство кривых вида $\lambda F + \mu G = 0$, где $F = 0$ и $G = 0$ — уравнения двух различных кривых одной и той же степени, а λ и μ — произвольные числа, не равные нулю одновременно. Все кривые пучка проходят через точки пересечения любых двух различных кривых этого пучка.

Теорема 1.2.5. *Пучок кривых степени n, проходящих через данные $d-1 = \frac{n(n+3)}{2} - 1$ точек общего положения, имеет еще $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ общих точек.*

Доказательство. Пусть $F = 0$ и $G = 0$ — уравнения двух кривых из рассматриваемого пучка кривых. Тогда уравнения всех остальных кривых этого пучка имеют вид $\lambda F + \mu G = 0$. Поэтому все они проходят через n^2 общих точек кривых $F = 0$ и $G = 0$. Среди этих точек данные точки составляют лишь некоторую часть; количество остальных точек равно

$$n^2 - \frac{n(n+3)}{2} + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

□

В частности, при $n = 3$ мы получаем

Следствие 1.2.6. *Для любых 8 точек на плоскости в общем положении существует такая девятая точка, что любая кубическая кривая, проходящая через эти 8 точек, проходит и через девятую.*

Для точек пересечения кривых разных степеней теорема, аналогичная теореме 1.2.5, выглядит следующим образом.

Теорема 1.2.7. *Рассмотрим все кривые степени n, проходящие через данные $np - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ точек кривой степени p, где $p < n$. Тогда все они имеют еще $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ общих точек, причем все эти точки лежат на рассматриваемой кривой степени p.*

Доказательство. Пусть на кривой $F = 0$ степени p выбрано α точек. Если $\alpha \leq n(n+3)/2$, то существует кривая $G = 0$ степени n, проходящая через данные точки. Кривая $G = 0$ пересекает кривую $F = 0$ в $np = \alpha + \beta$ точках. Требуется доказать, что если $\alpha = np - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$, то указанные β точек не зависят от выбора кривой $G = 0$.

Рассмотрим кривую $G' = 0$ степени n, проходящую через данные α точек. Кривые $G = 0$ и $G' = 0$ пересекаются в n^2 точках. Среди этих точек содержатся данные α точек; выберем среди этих n^2 точек еще $\alpha' = \frac{n(n+3)}{2} - 1 - \alpha$ точек. Тогда через данные $\alpha + \alpha' = \frac{n(n+3)}{2} - 1$ точек проходит пучок кривых степени n. В том случае, когда

$$\alpha' \leq \frac{(n-p)(n-p+3)}{2},$$

через выбранные α' точек можно провести кривую $H = 0$ степени $n - p$. Поэтому пучок кривых степени n, проходящих через выбранные $\alpha + \alpha'$ точек, порожден кривыми $G = 0$ и $FH = 0$. В частности, $G' = \lambda G + \mu FH$. Поэтому кривая $G' = 0$ пересекает кривую $F = 0$ в тех же $np = \alpha + \beta$ точках, что и кривая $G = 0$.

Остается заметить, что условие $\alpha' \leq \frac{(n-p)(n-p+3)}{2}$ эквивалентно тому, что $\alpha = \frac{n(n+3)}{2} - 1 - \alpha' \geq np - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$. □

Теорему 1.2.7 можно обобщить, а именно, вместо семейства кривых степени n, проходящих через точки пересечения кривых степени n и p, можно рассмотреть семейство кривых степени k, не обязательно равной n или p. Соответствующее утверждение выглядит следующим образом.

Теорема 1.2.8 (Кэли). *Пусть $n, p < k < n+p-3$. Тогда любая кривая степени k, проходящая через*

$$np - \frac{(n+p-k-1)(n+p-k-2)}{2}$$

точек пересечения кривых степени n и p, проходит и через остальные точки пересечения.

Доказательство. Пусть среди np точек пересечения кривой $F = 0$ степени p и кривой $G = 0$ степени n выбрано α точек. Рассмотрим произвольную кривую $G' = 0$ степени k, проходящую через эти α точек. Среди точек пересечения кривых $F = 0$ и $G' = 0$ выберем дополнительно $\alpha' = \frac{(k-n)(k-n+3)}{2}$ точек, а среди точек пересечения кривых $G = 0$ и $G' = 0$ выберем дополнительно $\alpha'' = \frac{(k-p)(k-p+3)}{2}$ точек. Это можно сделать, так как по условию $k-p+3 \geq p$ и $k-p+3 \leq n$, а значит, $\alpha' < kp$ и $\alpha'' < kn$. Через α' точек можно провести кривую $H' = 0$ степени $k-p$, а через α'' точек можно провести кривую $H'' = 0$ степени $n-p$.

В нашем случае $\alpha = np - \frac{(n+p-k-1)(n+p-k-2)}{2}$, поэтому $\alpha + \alpha' + \alpha'' = \frac{k(k+3)}{2} - 1$. Это означает, что через выбранные точки проходит пучок кривых степени k. Кривые $G' = 0, FH' = 0$ и $GH'' = 0$ входят в этот пучок. Следовательно, $G' = \lambda FH' + \mu GH''$, а значит, кривая $G' = 0$ проходит через все точки пересечения кривых $F = 0$ и $G = 0$. $\square$

1.3 Рациональная параметризация

Мы уже видели, как параметрически задается прямая на плоскости. Следующий по простоте пример рациональной параметризации — рациональная параметризация коники, позволяющая представить точки коники в виде $(x(t) : y(t) : z(t))$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — некоторые многочлены. Эту параметризацию можно получить следующим образом. Пусть A — некоторая точка невырожденной коники. Прямая, проходящая через эту точку, пересекает конику еще в одной точке. Но все прямые, проходящие через данную точку, образуют проективную прямую. Сопоставив каждой прямой, проходящей через данную точку, вторую точку ее пересечения с кривой, мы получим взаимно-однозначное отображение проективной прямой в конику, которое и является ее рациональной параметризацией.

Чтобы вычислить координатное представление этой параметризации, выберем аффинные координаты таким образом, чтобы коника имела уравнение $x^2 + y^2 = 1$, а точка на ней — координаты $(-1, 0)$. Уравнение прямой, проходящей через точку $(-1, 0)$, имеет вид $y = t(x+1)$. x-координата точек пересечения этой прямой с коникой дается уравнением

$$x^2 + (t(x+1))^2 = 1,$$

т.е.

$$(x+1)((1+t^2)x - (1-t^2)) = 0.$$

Решение $x = -1$ соответствует точке, через которую мы проводили прямую. Второе решение $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ это координата второй точки пересечения. Подставляя это решение в уравнение прямой, получаем формулу для y-координаты $y = \frac{2t}{1+t^2}$. Соответствующая полиномиальная параметризация проективной кривой имеет вид $(s:t) \mapsto (s^2 - t^2 : 2st : s^2 + t^2)$. Все координатные отображения такой параметризации — однородные многочлены степени 2 от проективных координат $(s:t)$ на проективной прямой.

Упражнение 1.3.1. Выпишите уравнения параметризации произвольной невырожденной коники $F(x, y, z)$, не приведенной к стандартному виду.

Рациональная параметризация коники обладает следующим замечательным свойством: если коника задана уравнением с рациональными коэффициентами и точка (x_0, y_0) имеет рациональные координаты, то точка $(x(t), y(t))$ имеет рациональные координаты тогда и только тогда, когда t — рациональное число (или $t = \infty$). Действительно, если числа $x(t)$ и $y(t)$ рациональны, то число $t = \frac{x(t)-x_0}{y(t)-y_0}$ тоже рационально. Обратное утверждение очевидно из нашей конструкции. Таким образом, рациональная параметризация коники позволяет описать все рациональные точки на этой конике, т.е. найти все решения соответствующего уравнения в рациональных числах. Некоторые уравнения более высокой степени тоже можно решать похожим способом. Прежде чем его описать, отметим еще одно важное приложение рациональной параметризации — к вычислению интегралов. Примером такого приложения может служить следующее упражнение.

Упражнение 1.3.2. а) Параметризуйте кривую $y^2 = ax^2 + bx + c$ с помощью семейства прямых $y = t(x - \alpha)$, где α — один из корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.
б) Примените полученную параметризацию для вычисления неопределенных интегралов вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx,$$

где $R(x, y)$ — некоторая рациональная функция.

Способность кривых более высокой степени допускать рациональную параметризацию тесно связана с наличием у них особых точек. Неприводимая кривая третьей степени не может иметь более одной особой точки кратности 2. В самом деле, если A и B — точки кратности 2, то прямая AB пересекает кривую по крайней мере четырехкратно. Для кубической кривой это означает, что прямая AB целиком принадлежит кривой, т. е. кривая приводима. Для кривой степени n тоже можно оценить сверху число особых точек.

Теорема 1.3.3. *Неприводимая кривая степени n не может иметь более $N = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ двойных точек.*

Доказательство. Случай $n = 3$ мы уже рассмотрели. Разберем теперь случай $n = 4$. В этом случае $N = 3$. Предположим, что A_1, A_2, A_3 и A_4 —

двойные точки кривой 4-й степени. Чтобы прийти к противоречию, возьмем на этой кривой произвольную точку P, отличную от точек A_i. Через точки P, A_1, A_2, A_3 и A_4 можно провести кривую степени 2. Она пересекает кривую степени 4 в точке P по крайней мере однократно, а в точках A_i по крайней мере двукратно. Всего точек пересечения получается не меньше $1 + 2 \cdot 4$, а по теореме Безу их должно быть ровно $2 \cdot 4$. Получено противоречие.

Для кривой степени n предположим, что $A_1, \ldots, A_{N+1}$ — двукратные точки этой кривой. Выберем на данной кривой произвольные точки $P_1, \ldots, P_{n-3}$, отличные от точек A_i. Тогда общее количество точек A_i и P_j будет равно

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 + (n-3) = \frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

Поэтому через эти точки можно провести кривую степени $n-2$. Она пересекает кривую степени n по крайней мере в

$$(n-1)(n-2) + 2 + (n-3) = n(n-2) + 1$$

точках, что противоречит теореме Безу. □

Мы не будем доказывать, что для любого n существует неприводимая кривая степени n, имеющая ровно $N = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ двойных точек. Вместо этого мы докажем, что кривая степени n с N двойными точками допускает *рациональную параметризацию.* Это означает, что существуют такие однородные многочлены $x(s,t)$, $y(s,t)$ и $z(s,t)$ степени n, что образ отображения $(s : t) \mapsto (x(s,t) : y(s,t) : z(s,t)) \in \mathbb{CP}^2$ совпадает с данной кривой. При этом разным значениям параметра t, как правило, соответствуют разные точки кривой. Двойные точки кривой составляют исключение — у каждой из них ровно два прообраза. С топологической точки зрения кривая в $\mathbb{CP}^2$, допускающая рациональную параметризацию, устроена так, что после выкалывания двойных точек она превращается в сферу, из которой выколото несколько точек.

Теорема 1.3.4. *Неприводимая кривая степени n, имеющая $N = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ двойных точек, допускает рациональную параметризацию.*

Доказательство. Рассмотрим сначала кубическую кривую, имеющую двойную точку $O = (0 : 0 : 1)$. При подходящем выборе координат такая кривая имеет в аффинной карте $z = 1$ уравнение $y^2 = (x+1)x^2$. Прямая, проходящая через точку O, задается уравнением $y = tx$. Эта прямая имеет с кубической кривой двукратное пересечение в точке O, поэтому она пересекает кубическую кривую еще ровно в одной точке $(x(t), y(t))$. Чтобы найти эту вторую точку пересечения, подставим уравнение прямой в уравнение кривой. Получим !!!

$$t^2x^2 = (x+1)x^2. \tag{1.3}$$

После деления на x^2 получаем x-координату второй точки пересечения $x = t^2 - 1$, а y-координата равна $y = t(t^2 - 1)$.

Таким образом, любой точке кривой, кроме точки $(0,0)$, соответствует ровно одно значение параметра t. Точке $(0,0)$ соответствуют две касательные $y = t_1x$ и $y = t_2x$ к двум ветвям кривой в этой точке. Поэтому исключительной точкой кубической кривой является двойная точка, а исключительными значениями параметра t являются t_1 и t_2.

При $n>3$ на кривой степени n с двойными точками $A_1, \ldots, A_N$ надо дополнительно фиксировать произвольные точки $P_1, \ldots, P_{n-3}$. Через точки $A_1, \ldots, A_N, P_1, \ldots, P_{n-3}$ проходит пучок кривых степени $n-2$. Каждая из этих кривых имеет с данной кривой $n(n-2)-1$ общих точек, поэтому у них есть еще ровно одна общая точка. Ясно также, что через любую точку кривой и точки $A_1, \ldots, A_N, P_1, \ldots, P_{n-3}$ можно провести кривую степени $n-2$, лежащую в нашем пучке. Тем самым, мы параметризовали точки нашей кривой, отличные от $A_1, \ldots, A_N, P_1, \ldots, P_{n-3}$, параметром пучка. Проверку того, что эта параметризация продолжается в точки $P_1, \ldots, P_{n-3}$ и до параметризации каждой из двух ветвей в двойных точках $A_1, \ldots, A_N$ кривой, мы оставляем читателю. $\square$

Доказательство теоремы 1.3.4 позволяет построить рациональную параметризацию явно. Рассмотрим в качестве примера семейство лемнискат $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2(x^2-y^2)z^2$ — кривых четвертого порядка. Лемниската имеет три двойные точки $(0:0:1)$ и $(1:\pm i:0)$. Выберем в качестве дополнительной точки P_1 точку $(0:0:1)$, т.е. рассмотрим пучок кривых второй степени, проходящих через точки $(1:\pm i:0)$ и касающихся одной из двух ветвей лемнискаты в точке $(0:0:1)$. В аффинной карте $z=1$ такие кривые (для одной из ветвей) имеют вид

$$x^2+y^2 = t(x-y).$$

Подставив это выражение в уравнение лемнискаты, получим $a^2(x^2-y^2) = \left(x^2+y^2\right)^2 = t^2(x-y)^2$, откуда

$$y = \frac{t^2-a^2}{t^2+a^2}x$$

и подстановка в уравнение лемнискаты дает ее параметризацию

$$x = \frac{ta^2(t^2+a^2)}{t^4+a^4}, \qquad y = \frac{ta^2(t^2-a^2)}{t^4+a^4}.$$

Упражнение 1.3.5. Докажите, что кривая $\left(x^2-y\right)^2 = y^3$ допускает рациональную параметризацию.

Упражнение 1.3.6. а) Докажите, что кривая $P_n(x,y) + P_{n-1}(x,y) = 0$, где P_n и P_{n-1} — однородные многочлены степени n и $n-1$ соответственно, допускает рациональную параметризацию.
б) Докажите, что кривая степени n, имеющая точку кратности $n-1$, допускает рациональную параметризацию.

Упражнение 1.3.7. Докажите, что точки $(x(t), y(t))$, где $x(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$, $\quad y(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n$, лежат на кривой, степень которой не превосходит n.

Отметим без доказательства, что для кривой, допускающей рациональную параметризацию $(x(t), y(t))$, параметр t можно выразить в виде рациональной функции от x и y. Это свойство позволяет использовать рациональную параметризацию кривой $F(x, y) = 0$ для вычисления неопределенных интегралов вида

$$\int_{F(x,y)=0} R(x, y)dx,$$

где R — рациональная функция. В самом деле, пусть кривая $F(x, y) = 0$ допускает рациональную параметризацию. Тогда точки этой кривой можно представить в виде $(x(t), y(t))$, где x и y — рациональные функции. Поэтому $R(x(t), y(t)) = R_1(t)$ и $dx(t) = r(t)dt$, где R_1 и r — рациональные функции. Следовательно,

$$\int_{F(x,y)=0} R(x, y)dx = \int Q(t)dt,$$

где Q — рациональная функция. Хорошо известно, что $\int Q(t)dt$ выражается через элементарные функции от t. Воспользовавшись тем, что $t = t(x, y)$ — рациональная функция от x и y, можно получить выражение интеграла $\int R(x, y)dx$ через элементарные функции от x и y, сравните с упражнением 1.3.2.