Теория вероятностей. Листок 4.

Многомерные распределения.

Срок сдачи: 25 ноября. На 10 баллов необходимо сдать 7 задач.

В задачах на многомерные плотности распределений следует использовать свойство "совместная плотность независимых с.в. есть произведение их плотностей", формулу свертки, а также формулу преобразования плотности случайного вектора (формулу замены переменной), которая в простейшем случае выглядит так: если $\rho_\xi(x_1, \cdots, x_n)$ есть плотность распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$, а $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — некоторое гладкое инъективное отображение, то плотности ρ_ξ и ρ_η распределений случайных векторов $\eta = F(\xi)$ и ξ связаны соотношением

$$\rho_\xi(x) = \rho_\eta(F(x))|\det DF(x)|,$$

где $x = (x_1, \cdots, x_n)$, а DF обозначает матрицу частных производных отображения F (матрица Якоби).

1) Построить пример двумерного случайного вектора с функцией распределения $F_{\xi,\eta}(x, y)$, непрерывной в точке (x_0, y_0), у которого соответствующие одномерные функции распределения $F_\xi(x)$, $F_\eta(y)$ разрывны в x_0 и y_0 соответственно.

2) Случайные величины $\xi_1, \cdots, \xi_n$, $n \geq 2$ независимы и имеют показательное распределение с плотностью e^{-x}, $x \geq 0$. Найти плотность распределения с.в. $\eta = \frac{\xi_1}{\xi_1 + \cdots + \xi_n}$.

Пусть $\xi_1, \cdots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. При каждом $\omega \in \Omega$ расположим $\xi_i(\omega)$ в порядке возрастания и перенумеруем их заново: $\xi_{(1)} \leq \cdots \leq \xi_{(n)}$. Полученная последовательность называется вариационным рядом.

3) Найти 1) функцию распределения $\xi_{(1)}$, 2) функцию распределения $\xi_{(n)}$, 3) совместную функцию распределения $(\xi_{(1)}, \xi_{(n)})$.

Обозначим через $\xi_{n,i}$ число появлений исхода i в n испытаниях полиномиальной схемы. При решении задач полезна формула

$$P(\xi_{n,1} = m_1, \cdots, \xi_{n,N} = m_N) = \frac{n!}{m_1! \cdots m_N!} p_1^{m_1} \cdots p_N^{m_N}, \quad n = m_1 + \cdots + m_N$$

4) Пусть ξ_i имеют плотность. Найти 1) плотность распределения $\xi_{(m)}$, 2) совместную плотность распределения $(\xi_{(k)}, \xi_{(m)})$.

5) Пусть ξ_i имеют плотность. Найти n-мерную плотность распределения $(\xi_{(1)}, \cdots, \xi_{(n)})$.

6) Доказать, что с.в. $(XY)^Z$, где X, Y, Z независимы и равномерно распределены на $[0, 1]$, равномерно распределена на $[0, 1]$.

7) С.в. X_1, X_2, X_3 независимы и имеют показательное распределение с параметром 1. Доказать, что с.в.

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2},\ Y_2 = \frac{X_1 + X_2}{X_1 + X_2 + X_3},\ Y_3 = X_1 + X_2 + X_3$$

независимы и найти их распределения.

8) Пусть пара с.в. (U, V) имеет равномерное распределение на единичном круге $\{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$, $W = U^2 + V^2$. Положим

$$X = U\sqrt{-\frac{2\ln W}{W}},\ Y = V\sqrt{-\frac{2\ln W}{W}}.$$

доказать, что X, Y независимы и имеют стандартное гауссовское распределение (т.е. плотность X, Y равна $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$).