Методы максимизации интеграла Шоке и их применение в многокритериальных задачах принятия решений.

Михаил Тимонин.
НИЯУ МИФИ.
mikhail.timonin@gmail.com

Январь 2012

Пример Парадокс Ellsberg [1961]

В урне 90 шаров, 30 из которых красные(R), а остальные 60 черные(B) или желтые(Y), в неизвестной пропорции.

Игра 1	100р, если вытягиваете красный шар	100р, если вытягиваете черный шар
Игра 2	100р, если вытягиваете красный или желтый шар	100р, если вытягиваете черный или желтый шар

Пример Парадокс Ellsberg [1961]

В урне 90 шаров, 30 из которых красные(R), а остальные 60 черные(B) или желтые(Y), в неизвестной пропорции.

Игра 1	100р, если вытягиваете красный шар	100р, если вытягиваете черный шар
Игра 2	100р, если вытягиваете красный или желтый шар	100р, если вытягиваете черный или желтый шар

(Черный, $\emptyset$) $\prec$ (Красный, $\emptyset$), но (Черный, Желтый) $\succ$ (Красный, Желтый)

1. $100P(R) + 0(1 - P(R)) > 100P(B) + 0(1 - P(B)) \quad \Rightarrow P(R) > P(B)$
2. $100P(B) + 100P(Y) + 0P(R) > 0P(B) + 100P(Y) + 100P(R) \quad \Rightarrow P(B) > P(R)$

Не существует P, способной выразить такие предпочтения

Независимость (Anscombe and Aumann [1963])

Для **всех** актов f, g, и h, и $\alpha \in (0,1)$, выполняется

$$f \succ g \Rightarrow \alpha f + (1-\alpha)h \succ \alpha g + (1-\alpha)h$$

MCDA - "Независимость по предпочтению"

Для любых f, g, h, h'

$$(f,h) \succcurlyeq (g,h) \Rightarrow (f,h') \succcurlyeq (g,h')$$

Пример

Простой контрпример - вино и обед.
(Белое, рыба) $\succcurlyeq$ (Красное, рыба) $\not\Rightarrow$ (Белое, мясо) $\succcurlyeq$ (Красное, мясо)

Пример

$$(w, f) \succ (r, f)$$
$$\lambda_1 w + (1-\lambda_1) f > \lambda_1 r + (1-\lambda_1) f$$
$$(r, m) \succ (w, m)$$
$$\lambda_1 r + (1-\lambda_1) m > \lambda_1 w + (1-\lambda_1) m$$

Проблема

Не существует аддитивной модели $X \succcurlyeq Y \Leftrightarrow \sum \lambda_i X_i \geq \sum \lambda_i Y_i$, где λ_i - "веса", $\sum \lambda_i = 1$, а X_i, Y_i оценки по критериям, способной выразить такие предпочтения.

Выводы

- Независимость слишком сильная аксиома
- $\Rightarrow$ Аддитивные модели недостаточно дескриптивны

N - конечное множество (критерии, состояния природы).

Определение (Емкость(нечеткая мера))

Функция $\nu : 2^N \to \mathbb{R}_+$*:*

1. $\nu(\varnothing) = 0$
2. $A \subset B \Rightarrow \nu(A) \leq \nu(B) \quad \forall A, B \in 2^N$
3. $\nu(N) = 1$ *(необязательно)*

В теории игр функция ν называется характеристической функцией кооперативной игры*.

Определение (Обращение Мебиуса)

$$m(A) = \sum_{B \subset A} (-1)^{|A \setminus B|} \nu(B)$$

$$\nu(A) = \sum_{B \subset A} m(B)$$

Определение (k-монотонность)

ν *называется 2-монотонной, если для всех* $A_1, A_2 \subset N$

$$\nu(A_1 \cup A_2) \geq \nu(A_1) + \nu(A_2) - \nu(A_1 \cap A_2)$$

k*-монотонной, если для всех* $A_1, \dots, A_k \subset N$

$$\nu(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \geq \sum_{\emptyset \neq I \subset 1,\dots,k} (-1)^{|I|+1} \nu(\bigcap_{i \in I} A_i)$$

ν *полностью монотонна(belief), если она* k*-монотонна для всех* $k \geq 2$.

Определение (k-аддитивность)

ν *называется* k*-аддитивной (*$k \geq 1$*), если*

$$m(A) = 0, \forall A : |A| > k$$

Определение

Интегралом Шоке функции $f : N \to \mathbb{R}_+$ *со множеством значений* $\{a_1, \dots, a_n\}$ *по емкости* $\nu : 2^N \to \mathbb{R}_+$ *называется*

$$\int f d\nu = C(\nu, (a_1, \dots, a_n)) = \sum_{i=1}^{n} a_{(i)}(\nu(N_{(i)}) - \nu(N_{(i+1)}))$$

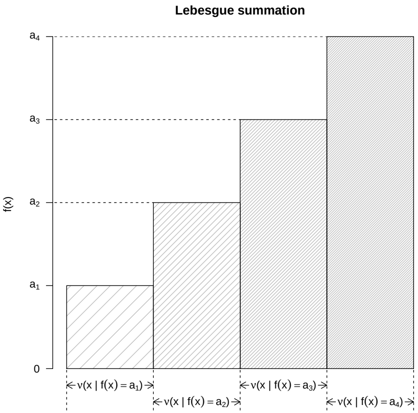
$$\int f d\nu = C(\nu, (a_1, \dots, a_n)) = \sum_{i=1}^{n} (a_{(i)} - a_{(i-1)}) \nu(x | f(x) \geq a_{(i)}, x \in N))$$

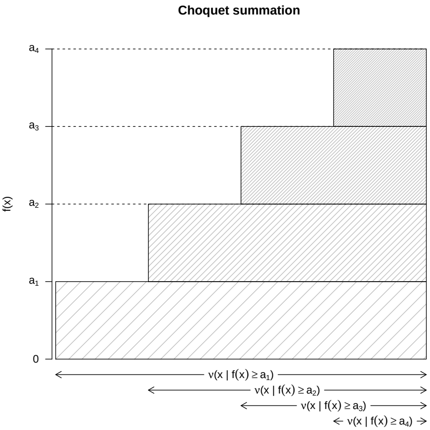
Где $a_{(1)}, \dots, a_{(n)}$ *перестановка элементов* $a_1, \dots, a_n$ *,такая что* $a_{(1)} \leq a_{(2)} \leq \dots \leq a_{(n)}$*,а* $N_{(i)} = \{a_{(i)}, \dots, a_{(n)}\}, N_{(n+1)} = 0, a_{(0)} = 0$

Если ν аддитивна, интеграл Шоке сокращается до интеграла Лебега

Представление предпочтений

$$X^1 \succcurlyeq X^2 \Leftrightarrow C(\nu, (x_1^1, \dots, x_n^1)) \geq C(\nu, (x_1^2, \dots, x_n^2))$$





$$\sum a_i \nu(x|f(x_i) = a_i)$$

$$\sum (a_{(i)} - a_{(i-1)}) \nu(x|f(x_i) \geq a_i)$$

Парадокс Ellsberg [1961]

В урне 90 шаров, 30 из которых красные(R), а остальные 60 черные(B) или желтые(Y), в неизвестной пропорции.

Игра 1	100р, если вытягиваете красный шар *	100р, если вытягиваете черный шар
Игра 2	100р, если вытягиваете красный или желтый шар	100р, если вытягиваете черный или желтый шар *

Пример емкости, соответствующей предпочтениям в парадоксе

	$\{R\}$	$\{Y\}$	$\{B\}$	$\{R,Y\}$	$\{R,B\}$	$\{Y,B\}$	$\{R,Y,B\}$
ν	$1/3$	0	0	$1/3$	$1/3$	$2/3$	1

Парадокс Ellsberg [1961]

В урне 90 шаров, 30 из которых красные(R), а остальные 60 черные(B) или желтые(Y), в неизвестной пропорции.

Игра 1	100р, если вытягиваете красный шар *	100р, если вытягиваете черный шар
Игра 2	100р, если вытягиваете красный или желтый шар	100р, если вытягиваете черный или желтый шар *

Пример емкости, соответствующей предпочтениям в парадоксе

	$\{R\}$	$\{Y\}$	$\{B\}$	$\{R,Y\}$	$\{R,B\}$	$\{Y,B\}$	$\{R,Y,B\}$
ν	$1/3$	0	0	$1/3$	$1/3$	$2/3$	1

Существует емкость ν такая, что

$$C(\nu,[R=100,B=0,Y=0]) > C(\nu,[R=0,B=100,Y=0])$$
$$C(\nu,[R=100,Y=100,B=0]) < C(\nu,[R=0,B=100,Y=100])$$

Основная задача

Как принять наилучшее решение из всех возможных?

Определение параметров.

Как смоделировать предпочтения ЛПР?

- Важность критериев
- Взаимодействие критериев
- Предпочтения между альтернативами

Оптимизация.

Максимизация интеграла Шоке.

- Анализ выпуклости
- Локальная/глобальная оптимизация
- Робастная оптимизация

Обозначения

- $N = \{1, \ldots, n\}$ - критерии ("проекты");
- $X_i, i \in N$ - значения критериев, $\succcurlyeq_i$
- $\underline{x}_i, \overline{x}_i \in X_i$ - наихудшие и наилучшие значения
- $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ - альтернативы;
- $\mathcal{X}_0 \subset X$ - допустимые альтернативы.

$\phi_i : \mathbb{R} \to X_i$

- $\phi_i(0) = \underline{x}_i, \phi_i(\overline{z}_i) = \overline{x}_i \ (Z_i = [0, \overline{z}_i])$;
- $z_i^1 \geq z_i^2 \Leftrightarrow \phi_i(z_i^1) \succcurlyeq_i \phi_i(z_i^2)$;
- $\phi^{-1}(\mathcal{X}_0) = \mathcal{Z}_0$.
- $\phi^{-1} : X_i \Rightarrow \mathbb{R}$ - порядковые шкалы

$f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - функции полезности

Интерпретации

- $z_i \in [0, \overline{z_i}]$ - инвестиции, расстояние, итд
- Пример $\mathcal{Z}_0 = \{z | \sum z_i \leq B\}$ - бюджет

Определение параметров.

- $f_i(z_i)$ - функции ценности
- ν - определение емкости

Проблема соизмеримости

$z_i \leq z_j, z_i \in Z_i, z_j \in Z_j$ не имеет смысла

Пути решения:

- Предположить, что критерии соизмеримы (“субъективная удовлетворенность”, агрегационная функция [Marichal, 2002])
- Построить интервальные шкалы $f_i : Z_i \to [0, 1]$

Отличие при решениях в условиях неопределенности

Структура множества: $X = Y^n$

Обеспечивает соизмеримость между исходами в различных состояниях

Построение интервальных шкал

Модификация MACBETH [Labreuche and Grabisch, 2003]

- Используются качественные оценки
- Регрессия
- “Аксиоматизация” (a-la Marichal)

Предположения в дальнейшем

Функции ценности

- Вогнуты на $\mathbb{R}$;
- Неубывают на $[0, \overline{z}_i]$.
- $f_i(0) = 0, f_i(\overline{z}_i) = 1$, (или $\lim_{z_i \to +\infty} f_i(z_i) = 1$)

Удобные на практике функции:

$$f(z) = 1 - e^{-\alpha z}$$

Определение параметров.

Как смоделировать предпочтения ЛПР?
Что может выражать интеграл Шоке?

- Важность критериев - Shapley value [Shapley, 1953] $\phi : 2^N \to [0,1]$. Интуитивно - i важнее j, если $\nu(i) > \nu(j)$.

$$\phi(i) = \sum_{T \subset N \setminus i} \frac{(n-t-1)!t!}{n} [\nu(T \cup i) - \nu(T)] = \sum_{T \subset N \setminus i} \frac{1}{t+1} m(T \cup i)$$

- Взаимодействие критериев - Interaction Index [Murofushi and Soneda, 1993]. Интуитивно - критерии "дополняют" друг друга, если $\nu(ij) > \nu(i) + \nu(j)$

$$I_m(ij) = \sum_{T \subset N \setminus ij} \frac{1}{t+1} m(T \cup ij).$$

Определение параметров.

Как смоделировать предпочтения ЛПР?
Что может выражать интеграл Шоке?

- Необходимые/достаточные критерии (veto/favor [Grabisch, 1997])
  Необходимость
  $$\nu(A) = 0 \qquad \forall A \not\ni i.$$
  Достаточность
  $$\nu(A) = 1 \qquad \forall A \supseteq i.$$
- Предпочтения между альтернативами (обучающее множество)
  $$Z^1 \succcurlyeq Z^2 \Leftrightarrow C(\nu, f(z^1)) - C(\nu, f(z^2)) \geq \delta$$

Емкости, совместимые с предпочтениями ЛПР

$$\mathcal{U} = \bigcap(\text{Shapley, InteractionIndex, VetoFavor, LearningSet, etc})$$

$\mathcal{U}$ - многогранник в $\mathbb{R}^{2^n}$

Нахождение наилучшего решения

$$C(\nu, (f_1(z_1), \dots, f_n(z_n))) \quad \to \max_z$$
$$z \in \mathcal{Z}_0$$

Выпуклый случай:

- Интеграл Шоке вогнут $\Leftrightarrow$ ν - 2-монотонна [Lovász, 1983]
- Вогнутый интеграл Шоке - минимакс по ядру ν [Schmeidler, 1986]

$$\min_p \langle p, f(z) \rangle \to \max_{z \in \mathcal{Z}_0}$$
$$p \in \{p | p(A) \geqslant \nu(A), \forall A \in 2^N\}$$

- Суперградиент с помощью определения

$$\nabla C(\nu, f(z)) = \left(\lambda_1 \frac{\partial f_1(z_1)}{\partial z_1}, \dots, \lambda_n \frac{\partial f_n(z_n)}{\partial z_n} \right).$$
$$\lambda_{(i)} = (\nu(N_{(i)}) - \nu(N_{(i+1)}))$$

Нахождение наилучшего решения

$$C(\nu, (f_1(z_1), \ldots, f_n(z_n))) \quad \to \max_z$$
$$z \in \mathcal{Z}_0$$

Выпуклый случай:

- Интеграл Шоке вогнут $\Leftrightarrow$ ν - 2-монотонна [Lovász, 1983]
- Вогнутый интеграл Шоке - минимакс по ядру ν [Schmeidler, 1986]

$$\min_p \langle p, f(z)\rangle \to \max_{z\in\mathcal{Z}_0}$$
$$p \in \{p | p(A) \geqslant \nu(A), \forall A \in 2^N\}$$

- Суперградиент с помощью определения

$$\nabla C(\nu, f(z)) = \left(\lambda_1 \frac{\partial f_1(z_1)}{\partial z_1}, \ldots, \lambda_n \frac{\partial f_n(z_n)}{\partial z_n}\right).$$

$$C(\nu, (f_1(z_1), \ldots, f_n(z_n))) = \sum_{i=1}^{n} f_{(i)}(z_{(i)}) (\nu(N_{(i)}) - \nu(N_{(i+1)}))$$

Невыпуклый случай

В общем случае $C(\nu, f(z))$ не является вогнутой функцией z.

Идея: Свести к множеству выпуклых задач. Все $\beta \in \mathcal{B}(\nu)$ 2-монотонны.

$$\max_{\beta \in \mathcal{B}(\nu)} C(\beta, f(z)) \to \max_{z \in \mathcal{Z}_0}$$

Дизъюнктивное представление [Denneberg, 2000]

Полностью монотонные меры $\mathcal{N} : 2^N \to \mathbb{R}$

$$\nu(A) = \max_{\mathcal{N} \in \mathcal{B}(\nu)} \mathcal{N}(A), \quad \forall A \subset N$$

$$C(\nu, f(z)) = \max_{\mathcal{N} \in \mathcal{B}(\nu)} C(\mathcal{N}, f(z))$$

Биективное соответствие

- $\mathcal{N}$ - полностью монотонные меры (necessity)
- $\mathcal{C}$ - максимальные цепи ($\emptyset \subset Y_1 \subset \ldots \subset Y_{n-1} \subset N$)
- $L_i \in \mathbb{R}, L_i = \{z | f_{(1)}(z_{(1)}) \leq \ldots \leq f_{(n)}(z_{(n)})\}$

$$m^{\mathcal{N}_i}(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \in \mathcal{C}_i$$
$$C(\nu, f(z)) = C(\mathcal{N}_i, f(z)), \forall z \in L_i \sim \mathcal{N}_i$$
$$C(\nu, f(z)) \geq C(\mathcal{N}_i, f(z)), \forall z \notin L_i \sim \mathcal{N}_i.$$

Проблема

$$|\mathcal{B}(\nu)| = n!$$

Возможно ли найти, с сохранением вышеуказанных свойств:

- Разложение, при котором $|\mathcal{B}(\nu)| \leq n!$
- Оптимальное разложение $\min |\mathcal{B}(\nu)|$

Идея

- Макс. цепь - линейный порядок $f_{(1)}(z_{(1)}) \leq \ldots \leq f_{(n)}(z_{(n)})$
- Обобщить $\mathcal{N}$ до частичных порядков (обознач. β^T)
- Поиск порядков(множеств) таких, что β^T полностью монотонны.

$m(A) \geq 0, \forall A \subset N$- критерий полной монотонности
$N_K = \{i | i \in A \subset N : m(A) < 0\}$

Характеризация

- Множества соответствуют частичным порядкам

$$T = \bigcap_{(i,j) \in N_K^2} (f_i(z_i) < f_j(z_j))$$

- Соотношение с линейными порядками и $\mathcal{N}$-мерами

$$T = \bigcup_j L_j$$
$$\beta^T(A) = \max_j \mathcal{N}_j(A)$$

Результаты

- Для произвольной ν: $|\mathcal{B}(\nu)| \leq n!$
- Для 2-аддитивных ν ($|A| > 2 \Rightarrow m(A) < 0$):

$$|\mathcal{B}(\nu)| = (-1)^{|N_K|}\chi(-1)$$

разложение оптимально.

Пусть $N = \{1, \ldots, 15\}$. $15! = 1307674368000$.

1. $K = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$, т.е. $m^\nu(\{1,2\}) < 0, m^\nu(\{2,3\}) < 0, m^\nu(\{1,3\}) < 0$:
$$|\mathcal{B}(\nu)| = 3! = 6;$$
2. $K = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\},\{11,12\},\{13,14\}\}$
$$|\mathcal{B}(\nu)| = 2^7 = 128;$$
3. $K = \{\{1,2\},\{1,3\},\{3,4\},\{3,5\},\{5,6\},\{5,7\},\ldots,\{13,14\},\{13,15\}\}$
$$|\mathcal{B}(\nu)| = (-1)^7(-1)(-1-1)^{15-1} = 2^{14} = 16384.$$

Проблема

Если $|\mathcal{U} = \bigcap(\text{Shapley, IntIndex, VetoFavor, LearningSet, etc})| > 1$,то

$$\cancel{C(\nu, f(z)) \to \max_{z \in \mathcal{Z}_0}}$$

Решения:

- Дополнительный критерий на $\mathcal{U}$ [Grabisch et al., 2008]
  - entropy
  - variance
  - distance
- "Robust relation" [Labreuche et al., 2010]

$$X^1 \succcurlyeq_N X^2 \Leftrightarrow C(\nu, f(z^1)) \geq C(\nu, f(z^2)) \forall \nu \in \mathcal{U}$$
$$X^1 \succcurlyeq_P X^2 \Leftrightarrow \exists \nu \in \mathcal{U} \colon C(\nu, f(z^1)) \geq C(\nu, f(z^2))$$

- Робастная оптимизация

Идея

Минимизировать отклонение от оптимума - Minimax regret (MMR).

$$\max_{\nu}\left[\max_{z} C(\nu, f(z)) - C(\nu, f(z^r))\right] \quad \to \min_{z^r}$$

$$\nu \in \mathcal{U}$$

$$z \in \mathcal{Z}_0$$

$$z^r \in \mathcal{Z}_0,$$

Некоторые характеристики

- Больше информации, чем для Minimax (интервальные шкалы)
- MMR противоречит Independence of Irrelevant Alternatives

Вопросы

- Как найти z_*^r?
- Существует ли $\nu^r \in \mathcal{U}$ такое, что z_*^r максимизирует $C(\nu^r, f(z))$

Минимакс теорема:

$$\max_{\nu_i \in \mathcal{U}_{ext}} \left[\max_{z \in \mathcal{Z}_0} C(\nu_i, f(z)) - C(\nu_i, f(z^r)) \right] \to \min_{z^r \in \mathcal{Z}_0}$$

$$\max_{\lambda \in \Lambda} \sum \lambda_i \left[\max_{z \in \mathcal{Z}_0} C(\nu_i, f(z)) - C(\nu_i, f(z^r)) \right] \to \min_{z^r \in \mathcal{Z}_0}$$

$$\min_{z^r \in \mathcal{Z}_0} \sum \lambda_i \left[\max_{z \in \mathcal{Z}_0} C(\nu_i, f(z)) - C(\nu_i, f(z^r)) \right] \to \max_{\lambda \in \Lambda}$$

$$\sum \lambda_i \max_{z \in \mathcal{Z}_0} C(\nu_i, f(z)) - \max_{z^r \in \mathcal{Z}_0} C\left(\sum \lambda_i \nu_i, f(z^r)\right) \to \max_{\lambda \in \Lambda}$$

Результаты

- Если $\mathcal{U}$ включает только 2-монотонные емкости, то z_*^r - глобальный максимум $C(\nu^r, f(z))$ для некоторой $\nu^r \in \mathcal{U}$
- В общем случае, z_*^r - локальный максимум $C(\nu^r, f(z))$

Проблема

Очень большое число вершин. $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2^n}$ [Combarro and Miranda, 2008]

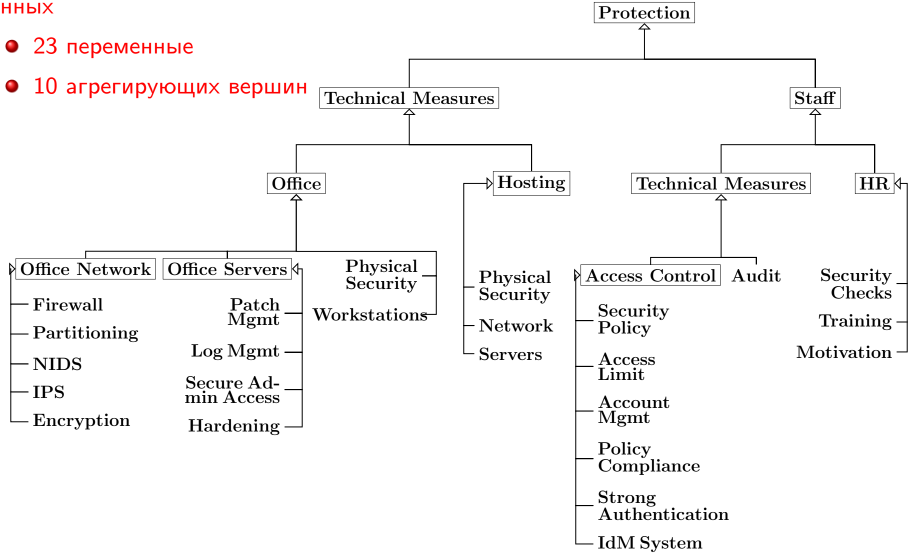
- "Внешняя" задача
$$\max_{\nu_i \in \mathcal{U}^K} \left[\max_{z \in \mathcal{Z}_0} C(\nu_i, f(z)) - C(\nu_i, f(z^r))\right] \to \min_{z^r \in \mathcal{Z}_0}$$
- "Внутренняя" задача
$$\mathcal{R}(\nu^{k+1}, z_k^r) = \max_{z \in \mathcal{Z}_0} C(\nu, z) - C(\nu, z_k^r) \to \max_{\nu \in \mathcal{U}}$$
- Branch-and-bound, локализация
$$\max_{\nu \in \mathcal{U}} C(\nu, f(z)) \leq C(\max_{\nu \in \mathcal{U}} \nu, f(z)), \forall z$$
- Уточнение аппроксимации $\mathcal{U}^{K+1} = \mathcal{U}^K \bigcup \nu_*^{k+1}$

Результаты

- До $n = 8$ (Python, Core2Duo)
- Существенно быстрее, чем поиск по всем вершинам
- Для k-аддитивных $\mathcal{U}$ с низким k, модификация с поиском по вершинам

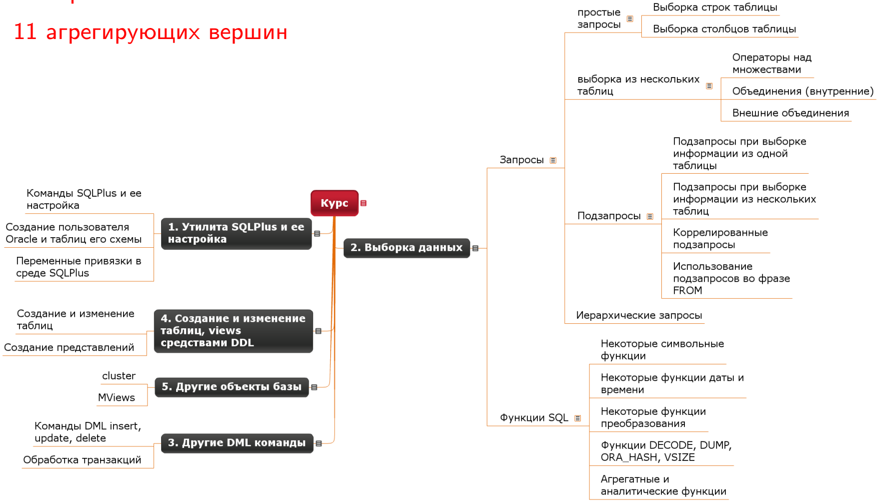
Построение системы защиты данных

- 23 переменные
- 10 агрегирующих вершин



Создание учебного курса

- 24 переменные
- 11 агрегирующих вершин



F. Anscombe and R. Aumann. A definition of subjective probability. *Annals of Mathematical statistics*, 34(1):199–205, 1963. ISSN 0003-4851.

E. Combarro and P. Miranda. On the polytope of non-additive measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(16):2145–2162, 2008. ISSN 0165-0114.

D. Denneberg. Totally monotone core and products of monotone measures. *International Journal of Approximate Reasoning*, 24(2-3):273–281, 2000. ISSN 0888-613X.

D. Ellsberg. Risk, ambiguity, and the Savage axioms. *The Quarterly Journal of Economics*, 75(4):643–669, 1961. ISSN 0033-5533.

M. Grabisch. Alternative representations of discrete fuzzy measures for decision making. *International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 5(5):587–607, Oct 1997. 4th International Conference on Soft Computing (IIZUKA 96), IIZUKA, JAPAN, SEP, 1996.

M. Grabisch, I. Kojadinovic, and P. Meyer. A review of methods for capacity identification in Choquet integral based multi-attribute utility theory:: Applications of the Kappalab R package. *European journal of operational research*, 186(2):766–785, 2008. ISSN 0377-2217.

C. Labreuche and M. Grabisch. The Choquet integral for the aggregation of interval scales in multicriteria decision making* 1. *Fuzzy Sets and Systems*, 137(1):11–26, 2003. ISSN 0165-0114.

C. Labreuche, P. Miranda, and F. Lehuede. Computation of the robust preference relation combining a Choquet integral and utility functions. In *5th Multidisciplinary Workshop on Advances in Preference Handling*, Lisbon, Portugal, Aug. 2010.

L. Lovász. Submodular functions and convexity. *Mathematical programming: the state of the art*, pages 235–257, 1983.

J. Marichal. An axiomatic approach of the discrete Choquet integral as a tool to aggregate interacting criteria. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 8(6):800–807, 2002. ISSN 1063-6706.

T. Murofushi and S. Soneda. Techniques for reading fuzzy measures (iii): interaction index. In *9th Fuzzy System Symposium*, pages 693–696, 1993.

D. Schmeidler. Integral representation without additivity. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 97(2):255–261, 1986. ISSN 0002-9939.

L. Shapley. A value for n-person games. *Contributions to the theory of games*, 2:307–317, 1953.

Спасибо за внимание!