Первая лекция: двумерные поля, мера

Литература: $\mathbb{Q}_p$ — Боревич–Шафаревич
нормирования — Комм. Алгебра Бурбаки
первые разделы первой главы — Востоков–Фесенко http://www.maths.nott.ac.uk/personal/ibf/bookn.html
Analys on ar. sch. I — " /mp.html

Упражнения:

(1) Топология на $\mathbb{Q}_p((t))$:

определим окрестности нуля в $\mathbb{Q}_p[[t]]$

$$U_{n,m} = p^n \mathbb{Z}_p[[t]] + t^m \mathbb{Q}_p[[t]]$$

в $t^i \mathbb{Q}_p[[t]]$ — $t^i U_{m,n}$

в $\mathbb{Q}_p((t)) = \varinjlim t^i \mathbb{Q}_p[[t]]$ как инд. предел предыд. топологий.

(a) Показать, что фунд. базис окр. нуля в $\mathbb{Q}_p((t))$

$$\{ \sum \alpha_i t^i : \alpha_i \in V_i \} \quad \text{где } V_i \subset \mathbb{Q}_p \text{ открытые}$$

и $V_i = \mathbb{Q}_p$ для $i \gg 0$.

(b) Показать, что $\mathbb{Q}_p((t))$ — тополог. группа.

(c) Показать, что произведение двух любых окрестн. нуля равно $\mathbb{Q}_p((t))$. Тем самым $\mathbb{Q}_p((t))$ — не топологическое поле.

(d) Показать, что последовательность $\alpha_n = \sum_{i \gg -\infty} a_{n,i} t^i$ $a_{n,i} \in \mathbb{Q}_p$ сходится к 0 тогда и только тогда когда

$$\forall i \ a_{n,i} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{и} \quad \exists i_0 \ \forall i < i_0 \ \forall_n a_{n,i} = 0$$

(2) Мера на $\mathbb{Q}_p((t))$: Пусть A — кольцо множеств, порожденное шарами $a + t^i p^j O$, $O = \mathbb{Z}_p + \mathbb{Q}_p[[t]]$ (кольцо: замкнуто отн. конечного $\cup$, $\cap$, $\setminus$).

(a) Показать, что если два шара имеют непустое пересечение, то один из них внутри другого.

(b) Назовем уровнем 1 множество всех шаров

Назовем уровнем 2 множества вида

$\dot{\bigcup}_{\substack{i \\ \text{кон.}}} A_i \setminus (\dot{\bigcup}_{\substack{j \\ \text{кон.}}} B_j)$ где A_i разделенные шары и B_j разделенные шары (*)

Показать, что ~~эт~~ множества уровня 2 можно записать

$\dot{\bigcup}_i A_i \setminus (\dot{\bigcup}_j B_j)$ так что каждое B_j является подмножеством одного из A_i, плюс (*).

(c) Назовем уровнем 3 множества вида

$\dot{\bigcup} C_k$ где C_k разделенные множества уровня 2.

Доказать, что мн-ва уровня ~~3~~ 2 замкнуты относит. пересечения, но не обязательно $\setminus$.

Доказать, что мн-ва уровня 3 замкнуты относит. $\cup$, $\cap$, $\setminus$.

* (d) Доказать, что непустое мн-во B уровня 3 можно представить как $\dot{\bigcup} B(A_i)$ разделенное объединение, где A_i – разделенные шары, а

матрешки $B(A_i) = (A_i \setminus \bigcup_j A_{ij}) \cup (\bigcup_k A_{ijk} \setminus \bigcup_l A_{ijkl}) \cup \ldots$

где $(A_{\ldots z})_z$ – разделенные шары внутри $A_{\ldots}$